PCSI - exercices de mathématiques

Géométrie affine euclidienne

1 Notion d'application affine

$\mathcal{E}_n$ désigne $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure affine canonique.
E_n est le $\mathbb{R}$ev $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1

Soit $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ une application. Démontrer qu'il y a équivalence entre

(1) f est constante ;

(2) f est affine et $L(f) = 0_{L(E_n)}$.

Exercice 2

Soit $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ une application. Démontrer qu'il y a équivalence entre

(1) f est une translation de $\mathcal{E}_n$;

(2) f est affine et $L(f) = \mathrm{Id}_{E_n}$.

Exercice 3 *Points fixes d'une application affine*

f est une application affine de $\mathcal{E}_n$ dans $\mathcal{E}_n$, et φ désigne la partie linéaire de f.

1. Démontrer que si $A \in \mathcal{E}_n$ est un *point fixe* de f (càd $f(A) = A$), l'ensemble des points fixes de f est $A + \ker(\varphi - \mathrm{Id}_{E_n})$: sva. de $\mathcal{E}_n$ passant par A et dirigée par $\ker(\varphi - \mathrm{Id}_{E_n})$.

   [*Indication* : transformer $\overrightarrow{Af(X)} - \overrightarrow{AX}$.]

2. Démontrer que si $\varphi - \mathrm{Id}_{E_n}$ est injective, f admet un unique point fixe.

Exercice 4 *homothéties affines*

Rappel : L'homothétie de centre A et de rapport λ est $h_{A,\lambda} : \left| \begin{array}{ll} \mathcal{E}_n & \to \mathcal{E}_n \\ X & \mapsto A + \lambda \overrightarrow{AX} \end{array} \right.$; on ne considère dans cet exercice que les cas $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$, $\boldsymbol{\lambda \neq 1}$.

1. Démontrer que $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ est une homothétie *si et seulement si* f est affine et $L(f) = \lambda \, \mathrm{Id}_{E_n}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

2. Démontrer que si f est une homothétie de $\mathcal{E}_n$, f admet un unique point fixe.

3. Soit $\mathcal{D}$ une droite affine, càd un espace affine de dimension 1. Quelles sont les applications affines de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$?

2 Notions métriques vectorielles

$\mathcal{E}_n$ est muni de sa structure affine euclidienne canonique, et orienté si nécessaire.

Les coordonnées et équations sont données dans un repère ON (direct) de $\mathcal{E}_n$.

Exercice 5

Soit f une endomorphisme de l'espace euclidien E_n conservant l'orthogonalité :

$$x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$$

pour tous x, $y \in E$.

1. Soit $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une BON de E_n. Que peut on dire de $\mathcal{B}' = (f(u_1), ..., f(u_n))$?

2. Soient i, $j \in [\![1, n]\!]$, $i \neq j$. En utilisant $u_i + u_j$ et $u_i - u_j$, démontrer que $\|f(u_i)\| = \|f(u_j)\|$.

3. En déduire que f est une similitude vectorielle de E_n.

Exercice 6

Soit $f : E_n \to E_n$ une application telle que $f(0_{E_n}) = 0_{E_n}$ et pour tous vecteurs x, $y \in E_n$:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. Démontrer que f conserve le produit scalaire.

2. En déduire que f est linéaire, et donc que $f \in \mathcal{O}(E_n)$.

Exercice 7

Soit a un vecteur non nul de E_n. On définit $f : E_n \to E_n$ par

$$f(x) = x - \frac{2(x \mid a)}{\|a\|^2} a.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de E_n.

2. Démontrer que f est une isométrie vectorielle de E_n.

3. Résoudre les conditions "$f(x) = x$" et "$f(x) = -x$".

4. En déduire la nature géométrique de f.

Exercice 8

Dans cet exercice, $n = 3$.

1. Soit r une rotation de E_3. Démontrer que pour tous x, $y \in E_3$ on a $r(x \wedge y) = r(x) \wedge r(y)$.

2. Étudier la réciproque.

3 Notions métriques affines

Exercice 9 *hyperplan médiateur*

Soit A, B deux points distincts de $\mathcal{E}_n$. On note

$$\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{E}_n \mid d(X, A) = d(X, B)\}$$

(ensemble des points équidistants de A et B). Soit I le milieu de (A, B) (donc : $I \in \mathcal{M}$).

1. Transformer $\left\|\overrightarrow{AX}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{BX}\right\|^2$ en injectant dans chaque terme le point I grâce à la relation de Chasles.
2. En déduire la nature géométrique de l'ensemble $\mathcal{M}$.
3. Déterminer $\mathcal{M}$ lorsque $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10

Soit f une isométrie de $\mathcal{E}_n$ telle que la quantité

$$\left\|\overrightarrow{Mf(M)}\right\|$$

soit indépendante du point $M \in \mathcal{E}_n$.

Démontrer que f est une translation de $\mathcal{E}_n$.

Exercice 11

Dans cet exercice, $n = 3$.

1. Soit r une rotation (affine) de $\mathcal{E}_3$, distincte de l'identité. Quelles sont les droites (globalement) invariantes par r ? Justifier rigoureusement la réponse sans oublier aucun cas particulier.
2. Soient r et s deux rotations de $\mathcal{E}_3$. En utilisant le 1., déterminer une CNS pour que r et s commutent (càd $r \circ s = s \circ r$). Même remarque.

Exercice 12

Dans cet exercice, $n = 2$.
On donne dans un repère ON l'application

$$f : \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_2 \ ; \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Etudier f et préciser ses éléments géométriques remarquables :

1. $\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 4 \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 2 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 4 - \sqrt{3} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 3 - 2\sqrt{3} \end{cases}$;
4. $\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \sqrt{2} - 1 \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1 \end{cases}$.

Exercice 13

Dans cet exercice, $n = 3$.
On donne dans un repère ON l'application

$$f : \mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3 \ ; \ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Etudier f et préciser ses éléments géométriques remarquables :

1. $\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z - 4) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z + 2) \\ z' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z + 2) \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = x \\ z' = y - 2 \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x' = -z + 1 \\ y' = -x \\ z' = y - 2 \end{cases}$;
4. $\begin{cases} x' = z + 1 \\ y' = x \\ z' = y - 2 \end{cases}$;
5. $\begin{cases} x' = \frac{1}{9}(-8x + 4y + z + 12) \\ y' = \frac{1}{9}(4x + 7y + 4z - 6) \\ z' = \frac{1}{9}(x + 4y - 8z + 8) \end{cases}$.