PCSI - exercices de mathématiques

Fonctions usuelles

1 Fonctions exp et ln

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition et l'ensemble des points où elle est dérivable ; calculer la dérivée.

1. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$;
2. $f(x) = \frac{\ln(\ln x)}{x}$;
3. $f(x) = \log_a(x^3 - 2x^2 + 1)$ $(a \in \mathbb{R}^{*+}\backslash\{1\})$;
4. $f(x) = x \ln x - x$;
5. $f(x) = \arctan(\ln x)$;
6. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$;
7. $f(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{1+x}$;
8. $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{x-2}}$.

Exercice 2

On détermine dans cet exercice les couples (p, q) d'entiers naturels distincts tels que

$$p^q = q^p. \tag{1}$$

Pour cela

1. Mettre la condition (1) sous la forme $f(p) = f(q)$ où f est une fonction que l'on précisera.
2. Étudier la fonction f pour déterminer dans quelle région de son domaine peut être réalisée la condition $f(x) = f(y)$.
3. Conclure en tenant compte du fait que x, $y \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Démontrer que $\log_{10} 2$ n'est pas un nombre *rationnel*, càd n'est pas le quotient $\frac{p}{q}$ de deux entiers non nuls. Pour cela, on pourra raisonner par l'absurde en supposant que c'est le cas et en faisant apparaître une contradiction.
N.B. On peut déduire de cette propriété un fait surprenant : pour tout nombre entier N, il existe une puissance de 2 dont les premiers chiffres sont exactement ceux de N.

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

(a) $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$;
(b) $2^{x^3} = 3^{x^2}$;
(c) $\log_a(x) = \log_x(a)$;
(d) $\log_3(x) - \log_2(x) = 1$.

2 Fonctions circulaires

Exercice 5

Exprimer

- $\cos 5x$ et $\cos 6x$ comme polynômes en $\cos x$;
- $\sin 7x$ comme polynôme en $\sin x$;
- $\sin 6x$ comme polynôme en $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 6

Linéariser

- $\cos^5 x$; $\cos^6 x$; $\cos^7 x$;
- $\sin^5 x$; $\sin^6 x$; $\sin^7 x$.

Exercice 7

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$P_n(x) = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}...\cos\frac{x}{2^n} = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{x}{2^k}.$$

Démontrer que si $\sin\frac{x}{2^n} \neq 0$:

$$P_n(x) = \frac{\sin x}{2^n} \times \frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

Exercice 8

Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition et l'ensemble des points où elle est dérivable ; calculer la dérivée.

1. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;
2. $f(x) = \tan(\arctan x)$;
3. $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$;
4. $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Exercice 9

Etudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$;
2. $f(x) = 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \arcsin x$;
3. $f(x) = \arcsin\frac{2\sqrt{x}}{1+x}$;
4. $f(x) = (x-1)^2 \arctan x$.

Exercice 10

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \,; \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \,; \end{cases}$$

1. par un calcul de trigonométrie ;
2. en utilisant une dérivation.

Exercice 11

1. Démontrer que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$, $xy \neq 1$,

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} + K\pi$$

où

$$K = \begin{cases} 0 & \text{si } xy < 1 \,; \\ 1 & \text{si } xy > 1,\ x > 0,\ y > 0 \,; \\ -1 & \text{si } xy > 1,\ x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

2. Démontrer que si $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \tan \frac{\pi}{2N}$ où N est le coefficient de $\arctan x$ dans le premier membre :

   (a) $2 \arctan x = \arctan \dfrac{2x}{1-x^2}$;

   (b) $3 \arctan x = \arctan \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$;

   (c) $4 \arctan x = \arctan \dfrac{4x - 4x^3}{1 - 6x^2 + x^4}$;

   (d) $5 \arctan x = \arctan \dfrac{5x - 10x^3 + x^5}{1 - 10x^2 + 5x^4}$;

   (e) $6 \arctan x = \arctan \dfrac{6x - 20x^3 + 6x^5}{1 - 15x^2 + 15x^4 - x^6}$.

3. Vérifier les formules suivantes :

   (a) $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$
   (Hutton 1776) ;

   (b) $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}$
   (Strassnitzky 1840) ;

   (c) $\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$
   (Machin 1706) ;

   (d) $\frac{\pi}{4} = 6 \arctan \frac{1}{8} + 2 \arctan \frac{1}{57} + \arctan \frac{1}{239}$
   (Störmer 1896) ;

   (e) $\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}$
   (Euler 1775).

3 Fonctions hyperboliques

Exercice 12

Soient a, $h \in \mathbb{R}$. On considère les sommes

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a + kh) \ \text{ et } \ B_n = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a + kh)\,.$$

Calculer A_n et B_n en s'inspirant de la méthode utilisée dans le cas circulaire (fonction sin et cos).

Exercice 13

Démontrer de deux façons que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \ :$$

1. en posant $y = \operatorname{argsh} x$ et en calculant $\operatorname{sh} y$, $\operatorname{ch} y$ puis $e^y = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y$;
2. par un calcul de dérivation.

Exercice 14

Démontrer de deux façons que pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$\operatorname{argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \ :$$

1. en posant $y = \operatorname{argch} x$ et en calculant $\operatorname{ch} y$, $\operatorname{sh} y$ puis $e^y = \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y$;
2. par un calcul de dérivation.

Exercice 15

Démontrer de deux façons que pour tout $x \in \ ]-1, 1[$:

$$\operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ :$$

1. en posant $y = \operatorname{argth} x$ et en calculant e^y ;
2. par un calcul de dérivation.

Exercice 16

Le *gudermannien* d'un réel $x \geq 0$ est défini par :

$$\operatorname{Gd} x = \arctan(\operatorname{sh} x)$$

1. Démontrer que $\operatorname{Gd} x = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$ par un calcul direct.
2. Retrouver ce résultat par un calcul de dérivée.
3. Tracer la courbe représentative de Gd.
4. Des deux formules pour $\operatorname{Gd} x$, laquelle est la plus appropriée à un prolongement à $\mathbb{R}$?