PCSI - exercices de mathématiques

Fonctions numériques

1 Fonctions particulières

Exercice 1

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions de A dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f et g sont majorées, $f+g$ est majorée et : $\sup(f+g) \leq \sup(f) + \sup(g)$.
2. Donner un exemple où l'inégalité du 1. est stricte.
3. Démontrer que si f est majorée et g bornée, $\sup(f+g) \geq \sup(f) + \inf(g)$.

Exercice 2

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application *croissante.*
Démontrer que f admet un point fixe.
[*Indication* : on montrera que

$$m = \sup(\{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\})$$

est bien défini et est point fixe de f.]

Exercice 3

Soit f une fonction de période T et soit $T' \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Démontrer que $g : x \mapsto f(\frac{xT}{T'})$ est périodique, de période T'.
2. Démontrer que si T est la période fondamentale de f, T' est la période fondamentale de g.

Exercice 4

Etudier les fonctions suivantes :

1. (a) $x \mapsto \frac{x}{E(x)}$;
   (b) $x \mapsto x - E(x)$;
   (c) $x \mapsto \frac{1}{1+x-E(x)}$;
   (d) $x \mapsto (-1)^{E(x)}(x - E(x) - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$.

Exercice 5

Soient f, g deux fonctions définies sur un intervalle I.

On note : $\left| \begin{array}{ll} \sup(f,g) : & x \mapsto \sup(f(x), g(x)) \\ \inf(f,g) : & x \mapsto \inf(f(x), g(x)) \end{array} \right.$.

En particulier : $\left| \begin{array}{l} f^+ = \sup(f, 0) \\ f^- = -\inf(f,0) = \sup(-f, 0). \end{array} \right.$

1. Démontrer que $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, $f^+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$.
2. Démontrer que f est continue en $x_0 \in I$ *ssi* deux des trois fonctions $|f|$, f^+, f^- sont continues en x_0 (la troisième l'étant alors également).
3. Démontrer que $\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f + g + |f-g|)$ et $\inf(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)$.
   En déduire que si f et g sont continues en x_0 il en est de même des deux fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$. La réciproque est-elle vraie ?

2 Limites et continuité

Exercice 6

Soient a, $b \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer :
$\lim_{x\to 0} \frac{x}{a}E(\frac{b}{x})$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{b}{x}E(\frac{x}{a})$, $\lim_{x\to 0^-} \frac{b}{x}E(\frac{x}{a})$.

Exercice 7

Soit f une fonction définie sur un voisinage de 0.
On suppose que: $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0.$

1. On pose $\varphi(x) = \frac{f(2x)-f(x)}{x}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(\frac{x}{2^n})}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\varphi(\frac{x}{2^k})$$

2. En déduire que: $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.
   [*Indication* : on pourra majorer séparément les deux termes (en valeur absolue) en remarquant que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1$.]

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ et paire ou impaire, $-f$ est également continue en x_0.
2. Démontrer que si f est continue en x_0 et périodique de période T, f est continue en $x_0 + nT$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$\left| \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(x) = 1 - xE(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0. \end{array} \right.$
Etudier la continuité de f.

Exercice 10

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
Démontrer que f a un point fixe.

Exercice 11

Soit $\chi_{\mathbb{Q}} : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \\ \quad x \mapsto 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ \quad x \mapsto 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right.$

1. Démontrer (par exemple à l'aide de suites) que $\chi_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.
2. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ x \mapsto x \ \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Etudier la continuité de f.

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Démontrer que si f admet des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

Soit f une fonction périodique.
Démontrer que si f admet une limite l en $+\infty$ (ou $-\infty$), f est constante.

Exercice 14

Démontrer que l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

est égal à l'ensemble des homothéties de $\mathbb{R}$.
[*Indication* : on montrera qu'une telle fonction vérifie $f(0) = 0$ et $f(px) = pf(x)$ pour $p \in \mathbb{N}$, puis $p \in \mathbb{Z}$, puis $p \in \mathbb{Q}$. On conclura à l'aide de la densité de $\mathbb{Q}$.]

Exercice 15

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1) = 0$ et pour tous x, $y \in [0,1]$:

$$(f(x) = f(y) = 0) \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0.$$

Démontrer que f est la fonction nulle.
[*Indication* : on montrera que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall p \in [\![0, 2^n]\!]$, $f(\frac{p}{2^n}) = 0$ et on pensera à l'approximation dyadique d'un nombre réel.]

Exercice 16

Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous x, $y \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

1. Démontrer que E est un sev de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Démontrer que si $f \in E$ s'annule en deux points distincts, $f = 0$. (*cf.* ex.15.)
3. Démontrer que E contient les fonctions affines $x \mapsto ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
4. En déduire que E est exactement l'ensemble des fonctions affines.

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x^2) = f(x).$$

1. Démontrer que: $\forall a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(a) = f\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)$ (où $a^{\frac{1}{2^n}} = \sqrt[2^n]{a}$).
2. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

Un marcheur parcourt 12km en 1h.
Démontrer qu'il existe une demi-heure pendant laquelle il parcourt 6km.

Exercice 19

Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ f(x) = \frac{1}{p+q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_+^* \text{ (irréductible)} \end{cases}$$

1. Démontrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = 0$.
[*Indication* : Pour $\varepsilon > 0$ considérer l'ensemble $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}_+^* \mid f(x) \geq \varepsilon\}$ et montrer que cet ensemble est *fini*.]
2. En déduire que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.[1]
3. Que devient ce résultat si (avec les mêmes notations qu'au début) on pose $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$?

Exercice 20

Soit $f : \left| \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x. \end{array} \right.$

Soit f_a la restriction de f à $]-\infty, a[$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Soit X l'ensemble des réels a tels que f_a soit injective.

1. Démontrer que X admet une borne supérieure α que l'on calculera.
2. Déterminer l'image de f_α et préciser son application réciproque.

Exercice 21 *("limite de limite")*

On pose $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^n}{1 + x^n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Donner une expression explicite de f.
3. Etudier la continuité de f. Quel commentaire peut-on faire ? En particulier, a-t-on

$$\lim_{x \to a} \lim_{n \to \infty} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \lim_{x \to a} f_n(x)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$?

[1] On peut montrer que l'inverse n'est pas possible, càd : il n'existe aucune fonction continue en tout rationnel et discontinue en tout irrationnel.

3 Equivalents et développements limités

Exercice 22

Limite quand $x \to 0$ de :

1. $\dfrac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$;
2. $\dfrac{a^{a^x} - a}{a^x - 1}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$;
3. $(\cos x)^{\operatorname{cotan} x^2}$;
4. $\dfrac{(\sin x)^x - 1}{x^x - 1}$ $(x \to 0^+)$;
5. $\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$;
6. $\dfrac{(a+x)^{a+x} - a^a}{(a+x)^a - a^a}$ $(a > 0)$.

Exercice 23

Limite quand $x \to (\frac{\pi}{2})^+$ et / ou $x \to (\frac{\pi}{2})^-$ de :

1. $\cos x \times \mathrm{e}^{\frac{1}{1-\sin x}}$;
2. $(1 - \mathrm{e}^{\operatorname{cotan} x})^{\pi - 2x}$;
3. $(\sin x - 1)\, \mathrm{e}^{\tan x}$;
4. $\left(\tan \frac{x}{2}\right)^{\tan x}$.

Exercice 24

Limite quand $x \to +\infty$ de :

1. $(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}$;
2. $\left(\cos \frac{a}{x}\right)^x$ $(a \neq 0)$;
3. $\operatorname{sh}\sqrt{x^2+x} - \operatorname{sh}\sqrt{x^2-x}$;
4. $\dfrac{\operatorname{ch}(x-1)}{\operatorname{ch} x}$;
5. $x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$;
6. $\sqrt[3]{\ln \operatorname{sh} x} - \sqrt[3]{x}$;
7. $\left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x - 1\right] \ln x$.

Exercice 25

Effectuer le DL au voisinage de 0, à l'ordre n indiqué, de la fonction suivante (le résultat est donné entre crochets pour vérification) :

1. $\frac{1}{\cos x}$ $(n = 5)$ $[1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)]$;
2. $\frac{x}{\sin x}$ $(n = 5)$ $[1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + o(x^5)]$;
3. $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ $(n = 4)$ $[x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)]$;
4. $\tan^2 x$ $(n = 7)$ $[x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \frac{17}{45}x^6 + o(x^7)]$;
5. $\frac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}$ $(n = 4)$ $[1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)]$;
6. $\ln \frac{\sin x}{x}$ $(n = 5)$ $[-\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^5)]$;
7. $\ln \frac{\arctan x}{x}$ $(n = 7)$ $[-\frac{x^2}{3} + \frac{13}{90}x^4 - \frac{251}{2835}x^6 + o(x^7)]$;
8. $\mathrm{e}^{x \sin x}$ $(n = 6)$ $[1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + o(x^6)]$;
9. $(1+x)^x$ $(n = 5)$ $[1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{3}{4}x^5 + o(x^5)]$;
10. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $(n = 3)$ $[\mathrm{e} \times (1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3) + o(x^3)]$;
11. $\ln\left[\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\right]$ $(n = 4)$
 $[-\frac{x}{2} + \frac{5}{24}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{251}{2880}x^4 + o(x^4)]$;
12. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$ $(n = 3)$ $[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} \times (1 - \frac{x^2}{60}) + o(x^3)]$;
13. $\sqrt{1 + \sin x}$ $(n = 3)$ $[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)]$;
14. $\sqrt{\cos x}$ $(n = 7)$ $[1 - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{96}x^4 - \frac{19}{5760}x^6 + o(x^7)]$;
15. $\cos^p x$ $(n = 6)$
 $[1 - \frac{p}{2!}x^2 + \frac{p(3p-2)}{4!}x^4 - \frac{p[15(p-1)^2+1]}{6!}x^6 + o(x^6)]$;
16. $\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^p$ $(n = 2)$ $[1 + \frac{p}{2}x + \frac{p(p+1)}{8}x^2 + o(x^2)]$;
17. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^p$ $(n = 5)$ $[1 - \frac{p}{3!}x^2 + \frac{p(5p-2)}{3 \times 5!}x^4 + o(x^5)]$.

(Pour 15., 16. et 17, $p \in \mathbb{N}$ quelconque.)

Exercice 26

Effectuer le DL à l'ordre n au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ de :

1. $\sin^2 x$ $(a = \frac{\pi}{3},\ n = 4)$;
2. $\frac{\ln x}{x^2}$ $(a = 1, n = 3)$;
3. $\sqrt{\tan x}$ $(a = \frac{\pi}{4},\ n = 3)$;
4. $(\tan x)^{\tan 2x}$ $(a = \frac{\pi}{4}, n = 3)$;
5. $\sqrt[3]{x^3 + x^2} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ $(a = +\infty,\ n = 2)$;
6. $\arctan \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}$ $(a = +\infty,\ n = 3)$.

Exercice 27

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \mathrm{e}^{-3(x-1)} + 3x$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ $g(x) = f(x) - f(\frac{1}{x})$. Démontrer que :

$$g(x) \underset{x \to 1}{\sim} \frac{9}{20}(x-1)^5.$$

Exercice 28

Peut-on trouver deux réels a et b tels que :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{\ln(1+x)}\right) - \frac{a}{x} - b = 0\ ?$$

Exercice 29

Déterminer a, $b \in \mathbb{R}$ pour que

$$f(x) = \cos x - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2}$$

soit un $o(x^n)$ $[x \to 0]$ avec $n \in \mathbb{N}$ le plus grand possible. Préciser cette valeur de n maximale obtenue.