PCSI - exercices de mathématiques

Espaces vectoriels euclidiens

Exercice 1

E est un ev euclidien de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit f une *application* de E dans E telle que :

$$\forall x \in E,\, \forall y \in E,\, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y).$$

Démontrer que f est linéaire, et conclure que $f \in \mathcal{O}(E)$. [On pourra utiliser une BON de E.]

2. Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Soit f une application ε-symétrique de E dans E, ce qui signifie que :

$$\forall x \in E,\, \forall y \in E,\, (f(x) \mid y) = \varepsilon(x \mid f(y)).$$

Démontrer que f est linéaire, et en déduire que f est un endomorphisme de E symétrique (*resp.* antisymétrique) si $\varepsilon = 1$ (*resp.* $\varepsilon = -1$).

Exercice 2

E est un ev euclidien, $p \in \mathbb{N}^*$.
$(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille de vecteurs *unitaires* de E telle que pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{p} (x \mid x_i)^2.$$

Démontrer que $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une *base orthonormale* de E.
Cela résultat demeure-t-il vrai si l'on suppose seulement les vecteurs x_i *non nuls* ?

Exercice 3

1. *Rappels sur les projecteurs.* E est un $\mathbb{K}$ev ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Un projecteur de E est un endomorphisme f de E tel que $f^2 = f$.
   (a) Démontrer que si f est un projecteur de E et si $F = \mathrm{Im}(f)$, et $F_0 = \ker(f)$, on a $E = F \oplus F_0$ et f est la projection sur F parallèlement à F_0.
   (b) Soient f et g des projecteurs de E, $F = \mathrm{Im}(f)$; $G = \mathrm{Im}(g)$. Démontrer que si f et g commutent, $h = g \circ f\, (= f \circ g)$ est un projecteur de E et $\mathrm{Im}(h) = F \cap G$.

Dans tout ce qui suit E est un ev euclidien de dimension finie $n \geq 2$.

2. Soient $f,\, g \in L(E)$. Démontrer que si f et g sont symétriques et commutent $f \circ g\, (= g \circ f)$ est un endomorphisme symétrique de E.

3. Si F est un sev de E on note Π_F la projection orthogonale sur F.
   (a) Démontrer que pour tout sev F de E, Π_F est un endomorphisme symétrique de E.
   (b) Soit f un projecteur de E et soit $F = \mathrm{Im}(f)$. Démontrer l'équivalence entre les énoncés :
      i. $f = \Pi_F$ et
      ii. f est un endomorphisme symétrique de E.

4. Soient F et G deux sev de E.
On pose $F' = (F \cap G)^\perp \cap F$, $G' = (F \cap G)^\perp \cap G$.
Démontrer l'équivalence entre les énoncés :
   i. Π_F et Π_G commutent, et
   ii. $F' \perp G'$

Exercice 4 *procédé d'orthogonalisation de Schmidt*

E est un ev euclidien, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille *libre* de vecteurs de E. Démontrer qu'il existe une famille *orthogonale libre* $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ et une famille de réels $(\lambda_{i,j})_{1 \leq j < i \leq p}$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & a_1 \\ x_2 & = & \lambda_{2,1} a_1 + a_2 \\ \vdots & & \\ x_p & = & \lambda_{p,1} a_1 + \lambda_{p,2} a_2 + \ldots + \lambda_{p,p-1} a_{p-1} + a_p \end{array}\right.$$

(càd $x_i = \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{i,j} a_j + a_i$ pour $i = 1, \ldots, p$).
[Raisonner par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.]

Exercice 5

E est un ev euclidien de dimension finie $n = 2$ ou 3.

1. Démontrer que si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont des BON de E on a, pour toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E, $|\det_{\mathcal{U}}(x_1, \ldots, x_n)| = |\det_{\mathcal{V}}(x_1, \ldots, x_n)|$.

2. La question 1. permet de définir l'application :

$$\delta : \left| \begin{array}{ccc} E^n & \to & \mathbb{R}^+ \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & |\det_{\mathcal{U}}(x_1, \ldots, x_n)| \end{array}\right.$$

(où $\mathcal{U}$ est une BON – quelconque – de E).
Démontrer que pour toute famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E on a :

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) \leq ||x_1|| \times \ldots \times ||x_n|| \qquad (1)$$

et que (1) est une égalité si et seulement si la famille $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthogonale ou comporte un vecteur nul.
[On utilisera l'ex. 4 et on raisonnera dans les deux cas : $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ liée ; $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ libre.]

Exercice 6

$E = \mathbb{R}_2[X]$. Si P, $Q \in E$ on pose

$$\varphi(P,Q) = P(-1)\,Q(-1) + P(0)\,Q(0) + P(1)\,Q(1)\,.$$

1. Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une BON (P_0, P_1, P_2) de E (pour φ) telle que : $\deg(P_i) = i$ pour $i = 0,\ 1,\ 2$.

   [On pourra appliquer l'ex. 4 à la base canonique de E.]

Exercice 7

E est un espace vectoriel euclidien ; $f \in L(E)$.
On suppose que $(x \mid y) = 0 \Rightarrow (f(x) \mid f(y)) = 0$.
Démontrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\|f(x)\| = k\,\|x\|$ pour tout $x \in E$.
[On utilisera les normes des images par f des vecteurs d'une BON de E.]

Exercice 8 *familles bi-orthogonales*

Dans E ev euclidien, deux familles $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq p}$ sont dites *bi-orthogonales* si

$$(x_i \mid y_j) = \delta_{i,j}$$

pour tous i, $j \in [\![1, p]\!]$.

1. Démontrer que si $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq p}$ sont bi-orthogonales, elles sont libres.
2. Démontrer que si $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe une unique base de E bi-orthogonale à $\mathcal{B}$. (Càd, une base qui soit aussi une famille bi-orthogonale à $\mathcal{B}$.)
3. Déterminer celle-ci dans le cas où

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\3\\1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 9

Soit F le sev de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_1 + 2\,x_3 + 3\,x_3 = 0$.

1. Déterminer une BOG de F.
2. Déterminer les matrices, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur F et de la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 10

Déterminer

$$\alpha = \inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_0^1 \left(x^3 - a\,x^2 - b\,x - c\right)^2 \mathrm{d}x$$

[Pour cela, on munira $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \int_0^1 P\,Q$ et on fera apparaître que α est le carré de la distance d'un certain élément de E à un certain sev de E, à préciser, puis on appliquera le théorème approprié à ce calcul.]

Exercice 11

Pour chaque matrice A suivante, constater que $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et préciser la nature géométrique de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

1. $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3\\ 6 & 3 & 2\\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$;
2. $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 9 & 6 & 2\\ 6 & -7 & -6\\ 2 & -6 & 9 \end{pmatrix}$;
3. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4\\ 4 & -8 & -1\\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Exercice 12

On considère la matrice

$$M = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{v}{u} & \frac{w}{u}\\ \frac{u}{v} & -\frac{1}{2} & \frac{w}{v}\\ \frac{u}{w} & \frac{v}{w} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer u, v, w pour que $M \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.
2. Préciser alors la signification géométrique de M.

Exercice 13

E est un ev euclidien orienté de dimension 3.

1. Si r est la rotation d'axe dirigé et orienté par un vecteur unitaire a et d'angle de mesure θ (modulo 2π), démontrer que l'image d'un vecteur x orthogonal à l'axe est donnée par

$$r(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)a \wedge x.$$

   [On se placera dans une BOND idoine.]
2. Quelle est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la rotation r d'axe dirigé et orienté par $a = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$?

Exercice 14

On considère 3 vecteurs u, v, w d'un ev euclidien orienté E de dimension 3.
On suppose que : $u \wedge v = w$; $v \wedge w = u$; $w \wedge u = v$.
Que peut-on dire de la famille (u, v, w) ?

Exercice 15

On considère une base (u, v, w) d'un ev euclidien E orienté de dimension 3.
Que peut-on dire de la famille $(u \wedge v, v \wedge w, w \wedge u)$?

Exercice 16

E est un ev euclidien E orienté de dimension 3.

1. *(Double produit vectoriel)* Simplifier $x \wedge (y \wedge z)$ si x, y, $z \in E$. [Calculer dans une BON (u, v, w) telle que $z \in \langle u\rangle$, $y \in \langle u, v\rangle$.]
2. *("Division vectorielle")* Soient deux vecteurs y et z de E, orthogonaux.
   (a) Démontrer qu'il existe un unique $x_0 \in y^\perp$ tel que $x_0 \wedge z = y$. [On cherchera x_0 sous la forme $\lambda\, y \wedge z$ pour appliquer le 1.]
   (b) En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation "$x \wedge z = y$" (d'inconnue x) est $x_0 + \mathbb{R}\, z$.