PCSI - exercices de mathématiques

Equations différentielles

Exercice 1

Résoudre (en s'aidant éventuellement d'une solution "évidente") :

1. $y' + y = \mathrm{ch}\, x + \mathrm{sh}\, x$;
2. $y' - 3x\ y = \sin x + 3x\ \cos x$;
3. $y' - 2\,\mathrm{th}\, x\ y = 2\,\mathrm{th}\, x$.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes (sur les intervalles convenables) :

1. $xy' - y = \ln|1 + x|$;
2. $2x(1 - x)\, y' + (1 - x)\, y = 1$;
3. $x(x^2 - 1)\, y' + 2y = x^2$;
4. $(1 - x^2)\, y' - xy = 1$;
5. $y' - y\ \tan x + \cos^2 x = 0$;
6. $x(x + 1)\, y' + y = \arctan x$;
7. $y'\ \sin x - y\ \cos x = \sin^4 x\ \ \mathrm{e}^x$;
8. $x\,(x - 1)\, y' - (3x - 1)\, y = -x\left(x^2 + 1\right)$.
   Étudier l'existence de solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$, construire la courbe représentative (étudier en particulier la forme de cette courbe au voisinage de $x = 0$).
2. Démontrer que f est solution de l'équation différentielle :
   $$2x(1 - x)\, y' + (1 - 2x)\, y = 1 \qquad \text{(E)}$$
3. Résoudre (E) sur les intervalles convenables.

Exercice 4

1. En posant $y = zx$ (où z est une fonction de la variable x) déterminer les fonctions $x \mapsto y = f(x)$ solutions de l'équation :
   $$2x^3\, y' - 3x^2\, y - y^3 = 0 \qquad \text{(F)}$$
2. Retrouver ces fonctions en divisant par y^3, en posant $u = \frac{1}{y^2}$, et en cherchant l'équation différentielle (linéaire) (E) dont u doit être solution pour que y soit solution de (F).

Exercice 5

On considère l'équation différentielle :

$$(x^2 + 1)\, y' - 2m\, x\, y = 1 \qquad (\mathrm{E}_m)$$

(où m est fixé dans $\mathbb{R}$).

1. On pose $I_p(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^p}$. Démontrer que les solutions de (E_m) s'écrivent : $y = (x^2 + 1)^m [I_{m+1}(x) + \lambda]$ (où λ est une constante réelle).
2. En posant $\Phi = \arctan x$, déterminer une nouvelle expression de la solution générale de (E_m).
   Exprimer en fonction de x la solution générale de (E_m) pour $m = \frac{3}{2}$ et $m = -\frac{1}{2}$.
3. On désigne par Y celle des solutions de (E_m) qui s'annule pour $x = 0$. Dans le cas où $m = -\frac{1}{2}$, construire la courbe représentative de Y.
4. Représenter l'ensemble des graphes des solutions de (E_m) pour $m = \frac{3}{2}$.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle :

$$(x + 1)\, y' + x\ y = x^2 - x + 1$$

1. Déterminer une solution polynomiale.
   [On commencera par étudier son degré.]
2. En déduire l'ensemble de toutes les solutions.
3. Déterminer la solution correspondant à la condition initiale $y\,(1) = 1$.

Exercice 7

On considère l'équation différentielle :

$$x^2 y' + y = x^2 \qquad \text{(E)}$$

1. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$. On ne cherchera pas à expliciter la primitive qui apparaît dans le calcul.
2. Étudier l'existence d'une solution admettant une limite finie en 0^+.

Exercice 8

Les fonctions inconnues étant à valeurs dans $\mathbb{R}$, résoudre :

1. $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$;
2. $y'' - 4y' + 4y = 2(x - 2)\,\mathrm{e}^x$;

3. $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 - 4x + 4$;
4. $y'' - 2y' + y = 6x\,\mathrm{e}^x$;
5. $y'' - y' + y = 6x\ \mathrm{sh}\,x$;
6. $y'' + y' + y = x\cos x$.

Exercice 9

On considère l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)y'' + x\ y' - y = 0$$

1. Chercher les solutions polynomiales.
   [Commencer par étudier le degré.]
2. En déduire l'ensemble de toutes les solutions.

Exercice 10

Soit l'équation différentielle :

$$\left(1+x^2\right)^2 y'' + 2x\left(1+x^2\right)\ y' + y = 0 \qquad \text{(E)}$$

1. Déterminer une bijection φ de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I, avec φ et φ^{-1} dérivables, telle que le changement de variable $t = \varphi(x)$ transforme (E) en une équation linéaire d'ordre 2 *à coefficients constants.*
2. En déduire l'ensemble de toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = f(1-x)$$

[On justifiera que f est *deux fois* dérivable.]

Exercice 12

Déterminer toute les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) + f(-x) = x + \cos x$$

[*Indication* : séparer les parties paire et impaire de f.]

Exercice 13

Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y)$$

pour tous x, $y \in \mathbb{R}$.