PCSI - exercices de mathématiques

Espaces vectoriels de dimension finie

1 Bases et dimension

Exercice 1

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

On pose $E = \mathbb{K}^n$ et on considère la famille $\mathcal{A}_n = (a_1, ..., a_n)$ définie par $a_1 = (1, 1, 0, ..., 0)$, $a_2 = (0, 1, 1, 0, ..., 0)$, ..., $a_{n-1} = (0, ..., 0, 1, 1)$,
$a_n = (1, 0, ..., 0, 1)$.

Pour quelles valeurs de n la famille $\mathcal{A}_n$ est-elle libre?

[On commencera par $\mathcal{A}_2 = (a_1, a_2)$, $\mathcal{A}_3 = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathcal{A}_4 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$].

Exercice 2

1. Si $a \in \mathbb{R}$ on définit
   $\gamma_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \gamma_a(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < a \\ 0 \text{ si } x \geq a \end{cases}$
   (*fonction caractéristique* de $]-\infty, a[$).

   Démontrer que si a_1, ..., a_n sont n réels *deux à deux distincts*, la famille $(\gamma_{a_1}, ..., \gamma_{a_n})_{1 \leq i \leq n}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Si $a \in \mathbb{R}$ on définit $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x - a|$. Démontrer que $(f_{a_1}, ..., f_{a_n})_{1 \leq i \leq n}$ est libre dans E (a_1, ..., a_n réels *deux à deux distincts*).
   [*Indication* : on pourra faire un raisonnement direct (assez délicat) ou utiliser un résultat de dérivabilité.]

Exercice 3

Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille libre de vecteurs du $\mathbb{K}$-ev E. Soient α^1, ..., $\alpha^n \in \mathbb{K}$. On pose

$$y = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i x_i$$

et $x'_i = x_i + y$ pour $i = 1$, ..., n.

Étudier la liberté de la famille $(x'_1, ..., x'_n)$.

Exercice 4

1. Démontrer que tout endomorphisme du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}$ est une homothétie.
   [*Indication* : on pourra comparer $f \in L_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$ avec l'homothétie de rapport $f(1)$.]

2. Plus généralement, démontrer que si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1, tout endomorphisme du $\mathbb{K}$-ev E est une homothétie.

Exercice 5

E est un $\mathbb{K}$-ev et $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$.

On suppose que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée. Démontrer que f est une homothétie.

[*Indication* : Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est colinéaire à x. Il faut montrer que le coefficient de proportionnalité ne dépend pas de x. On prendra x, $y \in E$ et on distinguera les cas : (x, y) liée ; (x, y) libre.]

Exercice 6

1. Démontrer que si $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ commute avec tout élément de $L_{\mathbb{K}}(E)$, alors pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est liée. (*cf.* ex. 5)

2. En déduire le *centre* de $(L_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$.

Exercice 7

E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$, $f^p = 0_{L(E)}$, $f^{p-1} \neq 0_{L(E)}$ ($p \in \mathbb{N}^*$).

1. Soit $x \in E$, $x \notin \ker(f^{p-1})$. Démontrer que la famille $\mathcal{F} = (x, f(x), f^2(x), ..., f^{p-1}(x))$ est libre dans E.

2. En déduire que $p \leq \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

3. Que peut-on dire de la famille $\mathcal{F}$ si $p = \dim_{\mathbb{K}}(E)$?

Exercice 8

E est l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit $\mathcal{D} : E \to E$; $f \mapsto f'$ et $\Phi : E \to E$; $f \mapsto g$ telle que $g(x) = x\,f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\mathcal{D}$ et Φ sont linéaires.

2. Démontrer que $\mathcal{D}$ est surjective et non injective.

3. Démontrer que Φ est injective et non surjective.
   Qu'en résulte-t-il sur $\dim_{\mathbb{R}}(E)$?

Exercice 9

E, F sont des $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{U} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E, $\mathcal{V} = (v_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base de F.

On définit la famille $(w_k)_{1 \leq k \leq n+p}$ par :

$$\begin{cases} w_k = (u_k, 0_F) \text{ pour tout } k \in [\![1, n]\!] \\ w_k = (0_E, v_{k-n}) \text{ pour tout } k \in [\![n+1, n+p]\!]. \end{cases}$$

Démontrer que $\mathcal{W} = (w_k)_{1 \leq k \leq n+p}$ est une base du $\mathbb{K}$-ev produit $E \times F$ et en déduire que :

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Exercice 10

E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$. x, $y \in E$.

1. On suppose (x, y) libre. Démontrer qu'il existe $u \in GL_{\mathbb{K}}(E)$ tel que $u(x) = x$ et $u(y) = x + y$.
   [*Indication* : on commencera par appliquer le th. de la base incomplète aux familles (x, y) et $(x, x + y)$.]

2. En déduire que si $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ commute avec tous les *automorphismes* de E, f est une homothétie de E. (*cf.* ex. 6).

Exercice 11

E est un $\mathbb{R}$-ev et f est un endomorphisme de E tel que : $f^2 = -\operatorname{Id}_E$.

Si $\alpha = \lambda + \mathrm{i}\mu \in \mathbb{C}$ on pose

$$\alpha.x = \lambda x + \mu f(x)$$

pour tout $x \in E$.

1. Démontrer que E, muni de son addition et de la loi externe $\mathbb{C} \times E \to E$; $(\alpha, x) \mapsto \alpha.x$, est un $\mathbb{C}$-ev.
2. En déduire que si E est de dimension finie non nulle $n \in \mathbb{N}^*$, n est pair et il existe une base $\mathcal{A} = (a_1, ..., a_{2p})$ du $\mathbb{R}$-ev E telle que : $f(a_{2k+1}) = a_{2k+2}$ pour $k = 0$, ..., $p-1$ et $f(a_{2k}) = -a_{2k-1}$ pour $k = 1$, ..., p.

Exercice 12

$n \in \mathbb{N}^*$, E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $3n$, $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$, $\operatorname{rg}(f) = 2n$.

Démontrer qu'il existe une base $\mathcal{A} = (a_1, ..., a_{3n})$ de E telle que $f(a_i) = a_{n+i}$ pour $i = 1$, ..., $2n$ et $f(a_i) = 0_E$ pour $i = 2n+1$, ..., $3n$.

Exercice 13

E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, u est un vecteur non nul de E.

Déterminer les endomorphismes f de E tels que pour tout $x \in E$ la famille $(u, x, f(x))$ est liée.

Exercice 14

Dans $\mathbb{R}^3$ on pose : $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Démontrer que (x_1, x_2, x_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15

Même exercice avec (dans $\mathbb{R}^4$) :

$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,$x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x+y+z \\ 2x+y+z \\ 2x+y+z \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Donner une base et la dimension de $\ker(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$.
3. Vérifier le théorème fondamental de dimension.

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$; $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+z+2t \\ y-z+t \\ x-y+3z \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que f est linéaire.
2. Démontrer que $\ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
3. Calculer le rang de $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ et déterminer une base de $\operatorname{Im}(f)$. Vérifier le théorème fondamental de dimension.

Exercice 18

E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$. Démontrer l'équivalence entre :

1. $\operatorname{Im} f = \ker f$ et
2. $f^2 = 0_{L_{\mathbb{K}}(E)}$ et n pair et $\operatorname{rg} f = \frac{n}{2}$.

2 Notion de rang

Exercices suivants : (n°19 à 25) : Calculer le rang de la famille $(x_1, ..., x_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

Exercice 19

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 21

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 17 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Exprimer x_4 comme combinaison linéaire de (x_1, x_2, x_3).

Exercice 22

$$x_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$x_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Trouver une relation de dépendance linéaire entre les x_i.

Exercice 23

$$x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24

$$x_1 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}.$$

(discuter selon $a \in \mathbb{R}$).

Exercice 25

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ -b \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(discuter selon a, b, $c \in \mathbb{R}$).

[*Indication* : on pourra commencer par montrer que la famille est toujours *liée* en explicitant une relation de dépendance linéaire entre x_1, x_2 et x_3.]

Exercice 26

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.

1. Soient f, $g \in L_{\mathbb{K}}(E)$ tels que $f \circ g = 0_{L_{\mathbb{K}}(E)}$, montrer que :
$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leq n.$$
2. On ajoute l'hypothèse : $f + g \in GL_{\mathbb{K}}(E)$. Montrer que :
$$\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = n.$$

Exercice 27

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et f, $g \in L_{\mathbb{K}}(E)$.

On suppose :

$$E = \ker f + \ker g = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g.$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.