PCSI - exercices de mathématiques

Déterminants

Le corps $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1

Soient $u_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$; $u_2 = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\\4\end{smallmatrix}\right)$; $u_3 = \left(\begin{smallmatrix}4\\9\\16\end{smallmatrix}\right)$.
Démontrer que $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{K}^3$.

Exercice 2

Démontrer *sans calcul* que $\left|\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&5\end{smallmatrix}\right| = 0$.

Exercice 3

Calculer (*sous forme factorisée*) les déterminants d'ordre 3 suivants :

1. $D_1 = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$;

2. $D_2 = \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 \end{vmatrix}$;

3. $D_3 = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$;

4. $D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; 5. $D_5 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{ab} \\ a & 1 & \frac{1}{b} \\ ab & a & 1 \end{vmatrix}$;

6. $D_6 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \sin a \\ 1 & \cos b & \sin b \\ 1 & \cos c & \sin c \end{vmatrix}$; 7. $D_7 = \begin{vmatrix} 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$;

8. $D_8 = \begin{vmatrix} b+c & bc-1 & (b^2+1)(c^2+1) \\ c+a & ca-1 & (c^2+1)(a^2+1) \\ a+b & ab-1 & (a^2+1)(b^2+1) \end{vmatrix}$.

Exercice 4

Soient $p,\, q \in \{1,2,3\}$ tels que $p \neq q$.
Démontrer que si $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ on a :

$$\det(AB) = 0 \text{ ou } \det(BA) = 0.$$

Exercice 5

Démontrer que si A est une matrice carrée d'ordre 3 *antisymétrique* à coefficients dans $\mathbb{K}$, on a : $\det(A) = 0$.

Exercice 6

Calculer, s'ils existent, les inverses des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; 2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; 4. $D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 6. $F = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

7. $G = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 8. $H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Exercice 7 *(déterminant circulant d'ordre 3)*

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$. a, b, c sont trois paramètres complexes. Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Calculer $\det(M)$ et l'exprimer sous la forme d'un produit de trois facteurs du premier degré en a, b et c.

Exercice 8 *(dérivation d'un déterminant)*

1. Soit D un déterminant d'ordre 2 dont les 4 coefficients sont des fonctions $a_{i,j}(x)$ d'une variable x définies au voisinage de x_0 et dérivables en x_0.

   Démontrer que D est dérivable en x_0 et que :

$$D'(x_0) = \begin{vmatrix} a'_{1,1}(x_0) & a_{1,2}(x_0) \\ a'_{2,1}(x_0) & a_{2,2}(x_0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1}(x_0) & a'_{1,2}(x_0) \\ a_{2,1}(x_0) & a'_{2,2}(x_0) \end{vmatrix}.$$

2. Démontrer de même que si D est un déterminant d'ordre 3 dont les 9 coefficients sont des fonctions $a_{i,j}(x)$ d'une variable x définies au voisinage de x_0 et dérivables en x_0, D est dérivable en x_0 et $D'(x_0)$ est la somme des trois déterminants obtenus en dérivant une et une seule colonne de D.

3. Enoncer et démontrer une propriété analogue pour les lignes.

4. On considère le déterminant suivant ($a,\, b\,, c \in \mathbb{R}$) :

$$D(x) = \begin{vmatrix} \cos(x-a) & \sin(x-a) & 1 \\ \cos(x-b) & \sin(x-b) & 1 \\ \cos(x-c) & \sin(x-c) & 1 \end{vmatrix}.$$

   (a) Démontrer *sans le calculer* que $D(x)$ est indépendant de la valeur du réel x.

   (b) Calculer directement $D(x)$ et retrouver ainsi ce résultat.