PCSI - exercices de mathématiques

Entiers naturels, dénombrements

1 Entiers naturels

Exercice 1

Démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la formule :

$$1 + 1! + 2.2! + ... + n.n! = 1 + \sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)!$$

Exercice 2

Démontrer que si $p,\ q \in \mathbb{N}$ et $p \leq q$ on a :

$$\sum_{i=p}^{q} \binom{i}{p} = \binom{q+1}{p+1}.$$

[Utiliser une récurrence.]

Exercice 3

On considère la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 4

Démontrer que $\sqrt{2}$ est *irrationnel* (càd : n'est pas le quotient de deux entiers.).

[*Indication* : on raisonnera par l'absurde et on se ramènera à une relation dans $\mathbb{N}$.]

Comment pourrait-on généraliser ce résultat ?

Exercice 5

E est un ensemble ordonné.

Soit $f : \mathbb{N} \to E$ une application. Démontrer que f est croissante (*resp.* strictement croissante) *ssi* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq f(n+1)$ (*resp.* $f(n) < f(n+1)$).

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante.

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) \geq n$.

2 Ensembles finis ; dénombrements

Exercice 7

On définit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$; $n \mapsto n+1$.

Que peut-on dire de f ?

Qu'en résulte-t-il pour $\mathbb{N}$?

Exercice 8

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, ..., p_n$ des nombres premiers. Déterminer un entier naturel N qui ne soit divisible par aucun des p_i, $1 \leq i \leq n$.
2. En déduire que l'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est *infini.*

Exercice 9

Combien y a-t-il de façons de subdiviser une classe de 36 élèves en 12 groupes de 3 ?

Simplifier l'expression obtenue et généraliser le résultat (nombre de partages de np objets en p groupements de n).

Exercice 10

Soit un nombre N de personnes.

1. Quelle est la probabilité pour que les dates de leurs anniversaires soient toutes distinctes ?
2. En déduire la probabilité P_N pour que deux (au moins) de ces personnes aient leur anniversaire le même jour.
3. (numériquement) Combien doit valoir N au minimum pour que P_N dépasse $\frac{1}{2}$?

Exercice 11

Si $n \in \mathbb{N}$ on pose $\Delta_n = \left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q=n\right\}$.

Calculer card(Δ_n).

Exercice 12

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{N}^p$ l'ensemble des p-uplets d'entiers naturels. Si $i = (i_1, ..., i_p)$ et $j = (j_1, ..., j_p)$ sont deux éléments de $\mathbb{N}^p$ on définit leur somme (notée $i+j$) par :

$$i + j = (i_1 + j_1, ..., i_p + j_p).$$

Soit $k = (k_1, ..., k_p)$ un p-uplet fixé. On pose

$$\Delta_k^{(p)} = \{(i,j) \in \mathbb{N}^p \times \mathbb{N}^p \mid i+j=k\}.$$

Calculer card($\Delta_k^{(p)}$).

Exercice 13

E est un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien y a-t-il de *relations sur* E ?
2. Combien sont réflexives ?
3. Combien sont symétriques ? antisymétriques ?

4. Combien sont réflexives et symétriques ? réflexives et antisymétriques ?

Exercice 14

E est un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Combien y a-t-il de *lois de composition internes* sur l'ensemble E ?
2. Parmi elles, combien admettent un élément a fixé de E pour neutre ?
   Combien de l.c.i. sur E admettent un neutre ?
3. Combien y a-t-il de l.c.i. commutatives sur E ?
4. Combien sont commutatives et admettent un élément neutre ?

Exercice 15

Soit $(E, \leq)$ un ensemble *fini*, *non vide* et *totalement ordonné*.
On pose $n = \text{card}(E)$ (donc : $n \in \mathbb{N}^*$). On pose :

$$A = \{(x, y) \mid x \in E, y \in E \text{ et } x < y\}.$$

Calculer $\text{card}(A)$.

Exercice 16

1. Déterminer le nombre de surjections d'un ensemble E de cardinal $n+1$ sur un ensemble F de cardinal n ($n \in \mathbb{N}^*$).
2. Même question avec cette fois E de cardinal $n+2$.

Exercice 17

E est un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Une *partition* de E (en 2 parties) est un couple (A, B) de parties de E tel que : $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$. On définit de même les partitions en 3, en 4...
Un *recouvrement* de E (en 2 parties) est un couple $(A,\ B)$ de parties de E tel que : $A \cup B = E$. On définit de même les recouvrements en 3, en 4...

1. Combien y a-t-il de partitions de E en 2 ? en 3 ?
2. Combien y a-t-il de recouvrements de E en 2 ? en 3 ?

Exercice 18

On donne dans le plan n points trois à trois non alignés P_1, ..., P_n. On trace toutes les droites possibles (P_iP_j) $(i \neq j)$ et on les suppose deux à deux non parallèles et trois à trois non concourantes, hormis en les P_i.
Calculer le nombre des points d'intersections de ces droites (autres que les P_i).

Exercice 19

E est un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer
$$\sum_{X,\ Y \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(X \cap Y).$$
2. En déduire
$$\sum_{X,\ Y \in \mathcal{P}(E)} \text{card}(X \cup Y).$$

Exercice 20 *(formules de combinatoire)*

1. Soit E un ensemble non vide. Démontrer qu'il y a un même nombre (que l'on précisera) de parties de E de cardinaux pairs et impairs.
2. En déduire que si $p \in \mathbb{N}^*$ on a (dans $\mathbb{Z}$) :
$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = 0.$$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$ montrer que :
   (a)
$$2^p \binom{n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} ;$$
   (b)
$$0 = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}.$$