PCSI - exercices de mathématiques

Courbes paramétrées - coniques

Le plan affine $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ est muni de son repère canonique (orthonormal) $\mathcal{R} = (O\ ;\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$.

1 Représentation cartésienne

Exercice 1

Construire les courbes d'équation $y = f(x)$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x^2 \,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$;
2. $f(x) = \left(x + 2 - \dfrac{1}{x}\right) \arctan x$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$;
4. $f(x) = x^{x-x^2}$;
5. $f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 2

Construire les courbes définies par le paramétrage

$$t \mapsto F(t) = O + x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$$

dans les cas suivants :

1. $x = \cos 3t$; $y = \sin 2t$;
2. $x = \cos 3t$; $y = \cos t + \sin t$;
3. $x = 2t^3 + 3t^2$; $y = 3t^2 + 6t$;
4. $x = t - t^3$; $y = t^2 - t^4$;
5. $x = t^3 + t^4$; $y = t^5 + t^6$;
6. $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$; $y = t\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;
7. $x = \dfrac{t-1}{t}$; $y = \dfrac{t^2}{t+1}$;
8. $x = \dfrac{t^3}{1-t^2}$; $y = \dfrac{t-2}{(1-t)^2}$;
9. $x = \dfrac{t^2}{(1-t^2)(1-2t)}$; $y = \dfrac{t^3}{(1-t^2)(1-2t)}$;
10. $x = \dfrac{t^2+1}{2t}$; $y = \dfrac{2t-1}{t^2}$;
11. $x = \tan t + \sin t$; $y = \dfrac{1}{\cos t}$;
12. $x = \cos^2 t + \ln \sin t$; $y = \sin t \cos t$.

2 Représentation polaire

Exercice 3

Construire la représentation graphique de la courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$ dans les cas suivants (a désignant un réel strictement positif) :

1. $r = a \sin \frac{2\theta}{3}$;
2. $r = a\theta$;
3. $r = \frac{a}{\theta}$;
4. $r = a\,\mathrm{e}^{\theta}$;
5. $r = a \sin^2 \theta$;
6. (a) $r^2 = a^2 \cos\theta$,
   (b) $r^2 = -a^2 \cos\theta$;
7. $r = a(2 + \cos 3\theta)$;
8. $r = a(1 - 2\sin 2\theta)$;
9. $r = a(1 + \cos 2\theta)$;
10. $r = a \cos\theta \cos 2\theta$;
11. $r = a(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$;
12. $r = a(\cos\theta - \cos 2\theta)$;
13. $r = \dfrac{a}{\cos\theta - \cos 2\theta}$;
14. $r = a(1 - \tan \frac{\theta}{3})$;
15. $r = a\ \dfrac{\cos 2\theta}{2\cos\theta - 1}$;
16. $r = a\ \dfrac{1 + 2\cos\theta}{1 - 2\cos\theta}$;
17. $r = a\ \dfrac{\sin\theta}{1 + \cos\theta\cos 2\theta}$;
18. $r = a\ \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \cos\theta}$.

Exercice 4

Construire la courbe image du paramétrage en coordonnées polaires $M = O + \rho(t)\,\vec{u}\,(\theta(t))$. On ne cherchera pas à expliciter $\rho(t)$ en fonction de $\theta(t)$.

1. $\rho(t) = a\left(t + \dfrac{1}{t}\right)$; $\theta(t) = 1 + t^2$ $(t \in \mathbb{R}_+^*)$;
2. $\rho(t) = at$; $\theta(t) = t(t+1)(t+2)$; préciser les tangentes en les points où $t = -2, -1, 0$ et où $\theta(t)$ est extrémal ;
3. $\rho(t) = at$; $\theta(t) = t + \dfrac{1}{t}$ $(t \in \mathbb{R}_+^*)$.

3 Coniques

Exercice 5

Reconnaître la courbe suivante donnée par son équation dans le repère orthonormal $\mathcal{R}$.

Déterminer un repère où l'équation de cette courbe est sous forme canonique.

1. $x^2 - xy + y^2 - y = 0$;
2. $x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 2 = 0$;
3. $2x^2 - y^2 + 2x - y = 0$;
4. $x^2 + 3y - 4x = 2$;
5. $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Exercice 6

Discuter selon la valeur du paramètre m la nature de la courbe $\mathcal{C}_m$ d'équation

$$(m-1)\ x^2 + m\ y^2 - 4m\ y + 2 = 0.$$

Exercice 7

Soir $\mathcal{E}$ l'ellipse de foyers F et F' et de grand axe $2a$. On suppose que $\mathcal{E}$ est l'image d'un paramétrage régulier $t \mapsto M(t)$ de classe $\mathcal{C}^1$.

En dérivant la condition $\left\|\overrightarrow{FM}(t)\right\| + \left\|\overrightarrow{F'M}(t)\right\| = 2a$, démontrer que la tangente à $\mathcal{E}$ en $M(t)$ est bissectrice des droites $(FM(t))$ et $(F'M(t))$.

Exercice 8

Soit $\mathcal{H}$ une *hyperbole équilatère*. Soient A, B et C trois points distincts de $\mathcal{H}$.

Démontrer que l'*orthocentre* du triangle (A, B, C) (point de concours de ses trois hauteurs) appartient à $\mathcal{H}$.

Exercice 9

Soit le point A de coordonnées $(a, 0)$ $(a > 0)$.

On considère les paraboles passant par A dont le foyer est en l'origine O.

Déterminer, par une équation polaire, l'ensemble des sommets de ces paraboles, et reconnaître la courbe obtenue.

Exercice 10

Étudier la courbe d'équation

$$x^2 - xy + x^2 + x + y + 1 = 0.$$

En déduire l'ensemble des points du plan vérifiant la condition

$$f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 - 1 = 0.$$

Quelles sont les solutions entières (n, m) de l'équation

$$n^3 + 3nm + m^3 = 1 \text{ ?}$$

Exercice 11

On appelle *orthoptique* d'une courbe $(\mathcal{C})$ le lieu des points du plan "d'où l'on voit $(\mathcal{C})$ sous un angle droit", càd le lieu des points P du plan par lesquels passent deux tangentes à $(\mathcal{C})$ perpendiculaires.

1. On considère la conique $(\mathcal{C})$ d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(il s'agit donc d'une ellipse si $\varepsilon = 1$, d'une hyperbole si $\varepsilon = -1$).

(a) Déterminer une *équation tangentielle* de $(\mathcal{C})$, càd une CNS sur les paramètres u, v et h pour que la droite

$$\mathcal{D} \mid u\,x + v\,y = h$$

soit tangente à $(\mathcal{C})$.
[*Indication* : étudier l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec $(\mathcal{C})$.]

(b) En déduire l'orthoptique de $(\mathcal{C})$.

2. Mêmes questions avec la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation

$$y^2 = 2px.$$

Que remarque-t-on dans ce cas ?