PCSI - exercices de mathématiques

Convexité

Exercice 1

Démontrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$\sqrt[n]{x_1...x_n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n}.$$

Exercice 2

$(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}$ est une famille de réels positifs telle que, pour tous i, $j \in [\![1, n]\!]$: $\sum_{k=1}^n a_{k,j} = 1$ et $\sum_{k=1}^n a_{i,k} = 1$.

Démontrer que si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de réels *strictement positifs* et si $y_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k}x_k$ pour $i = 1, ..., n$, on a : $\prod_{i=1}^n y_i \geq \prod_{i=1}^n x_i$.

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère une application f de $]a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qu'on suppose *convexe, croissante* et *non constante* sur $]a, +\infty[$.

Démontrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 4

1. Démontrer que l'application $f : \ ]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $f(t) = t \ln t$ pour tout $t \in \ ]0, +\infty[$ est convexe sur $]0, +\infty[$.

2. Soient x, y, a, b quatre nombres réels strictement positifs. Démontrer que l'on a :

$$x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b} \geq (x + y) \ln \frac{x + y}{a + b}.$$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit E le $\mathbb{R}$ev $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Si $x = (x_1, ..., x_n) \in E$ on pose :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Démontrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur E. (Pour $p = 1$ on retrouve la norme $x \mapsto \sum_{k=1}^n |x_k|$, et pour $p = 2$ on retrouve la norme euclidienne.)

2. Démontrer que pour tout $x \in E$ on a :
$\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$, où $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|$.

Exercice 6 [1]

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application *continue* sur $[a, b]$ à valeurs strictement positives : $\forall t \in [a, b]$, $\varphi(t) > 0$.

1. Si $x \in \mathbb{R}$ on pose : $g(x) = \int_a^b (\varphi(t))^x \,\mathrm{d}t$.
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) > 0$.

2. On peut donc définir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln g(x) = \ln \left(\int_a^b (\varphi(t))^x \,\mathrm{d}t\right).$$

Démontrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 [1]

On note $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a, b])$ (*resp.* $\mathcal{C}^0([a, b])$) le $\mathbb{R}$ev des applications continues par morceaux (*resp.* continues) de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. (a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$.)

On rappelle que $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ est une norme sur $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a, b])$ (et sur $\mathcal{C}^0([a, b])$).

Soit $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$. Si $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a, b])$, $|f| : [a, b] \to [0, +\infty[$ est intégrable, et comme $x \mapsto x^p$ est continue sur $[0, +\infty[$ (donc sur $[0, M]$ si $M = \|f\|_\infty$), $t \mapsto |f(t)|^p$ est intégrable sur $[a, b]$, ce qui permet de poser :

$$N_p(f) = \left(\int_{[a,b]} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(pour $p = 1$, $N_1(f) = \int_{[a,b]} |f|$).

1. *Soit* $p \in [1, +\infty[$. Démontrer que N_p est une *semi-norme*[2] sur $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a, b])$ et une norme sur $\mathcal{C}^0([a, b])$, et que pour tout $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a, b])$ on a :

$$N_p(f) \leq (b - a)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty.$$

2. *Soient* p, $q \in [1, +\infty[$ *tels que* $p < q$. Démontrer que pour tout élément f de $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a, b])$ on a :

$$N_p(f) \leq (b - a)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} N_q(f).$$

3. (a) Si $\alpha \in]0, +\infty[$ on définit

$$\varphi_\alpha : \left|\begin{array}{ll} [a, b] & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto \varphi_\alpha(t) = \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^\alpha \end{array}\right..$$

Calculer $N_p(\varphi_\alpha)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.
Calculer $\|\varphi_\alpha\|_\infty$.

   (b) *Soient* p, $q \in [1, +\infty[$ *tels que* $p < q$. Démontrer (en utilisant φ_α) que les semi-normes N_p et N_q ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}^0([a, b])$.

   (c) *Soit* $p \in [1, +\infty[$. Comparer N_p et $\|\cdot\|_\infty$ (sur $\mathcal{C}^0([a, b])$ et $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a, b])$).

4. Démontrer que $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} N_p(f)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ et retrouver ainsi le résultat de la question 1.

---

[1] Cet exercice utilise l'inégalité de Hölder.

[2] Même définition qu'une norme, mais en supprimant la condition "$N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$".