PCSI - exercices de mathématiques

Nombres complexes

1 Corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

Exercice 1

Si a, $b \in \mathbb{R}$ sont fixés, existe-t-il $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\mathrm{j}\, z) = a$ et $\mathrm{Re}(\mathrm{j}^2\, z) = b$?

Exercice 2

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\,(z) > 0$ et $\left|z^2 - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$.
Démontrer que $\left|z - \frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3}$.

Exercice 3

1. Démontrer que quels que soient les complexes z et z' on a :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2).$$

(Cette relation est appelée *égalité du parallélogramme*, pourquoi ?)

2. Soit u une racine carrée de zz'. Démontrer :

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z + z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z + z'}{2} - u\right|.$$

Exercice 4

Déterminer le module et un argument du complexe

$$z = \frac{1 - \mathrm{i}}{1 + \cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha}$$

en fonction de $\alpha \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$.
[Commencer par le dénominateur.]

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes :

- $A_n = \sum\limits_{0\le 2k\le n} \binom{n}{2k}$; $B_n = \sum\limits_{0\le 2k+1\le n} \binom{n}{2k+1}$
[Développer $(1+1)^n$, $(1-1)^n$ à l'aide de la *formule du binôme*
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}.]$$
- $I_n = \sum\limits_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k}$; $J_n = \sum\limits_{0\le 2k+1\le n} (-1)^k \binom{n}{2k+1}$.
[Faire de même avec $(1 + \mathrm{i})^n$.]

Exercice 6

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes :
$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, \cos kx$;
$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, \sin kx$.

Exercice 7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes :
$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a + kx)$;
$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a + kx)$;
$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cos(a + kx)$;
$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \sin(a + kx)$.

Exercice 8

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes :
$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx$; $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin^2 kx$;
$C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos^k x \cos kx$; $D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x}$
$(x \in \mathbb{R} - (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}))$; $E_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x$;
$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.

2 Cercle unité $\mathbb{U}$, exponentielle complexe

Exercice 9

Déterminer le module et un argument de $z = \frac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}}$.
En déduire z^{21}.

Exercice 10

Déterminer z pour que z, $z-1$ et $\frac{1}{z}$ aient le même module.

Exercice 11

Calculer le nombre complexe $\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^{30}$.

Exercice 12

On rappelle que $\mathrm{j} = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

1. Calculer $\mathrm{j}\,\bar{\mathrm{j}}$, j^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer $1 + \mathrm{j}$ en fonction de $\bar{\mathrm{j}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{0\le 3k\le n} \binom{n}{3k} ; \\ b_n &= \sum_{0\le 3k+1\le n} \binom{n}{3k+1} ; \\ c_n &= \sum_{0\le 3k+2\le n} \binom{n}{3k+2} \end{aligned}$$

(*cf.* ex. 5).

En calculant $(1 + 1)^n$, $(1 + \mathrm{j})^n$, $(1 + \mathrm{j}^2)^n$ former un système d'équations vérifié par a_n, b_n, c_n.

Résoudre ce système et calculer a_n, b_n, c_n “le plus simplement possible”.

Exercice 13

Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{5}}$.

1. Calculer $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.
2. En déduire une équation du second degré vérifiée par $\Omega = \omega + \frac{1}{\omega}$, puis la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
3. Comment peut-on utiliser ce qui précède pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier ?

Exercice 14

Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{7}}$. On pose

$$a = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } b = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

1. Que peut-on dire de b par rapport à a ?
2. Déterminer des expressions très simples de $a + b$ et ab.
3. En déduire une équation du second degré vérifiée par a et b, puis les déterminer.

Exercice 15

Soient trois complexes a, b, c de module 1 tels que : $a + b + c = 1$. On cherche à prouver que l'un des trois est nécessairement égal à 1. Pour cela :

1. Démontrer que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ [penser à la conjugaison].
   En déduire que $ab + bc + ca = abc$.
   On note k cette valeur commune.
2. Développer, l'expression $(z - a)(z - b)(z - c)$ pour $z \in \mathbb{C}$. On exprimera le résultat en fonction de k.
3. En déduire le résultat demandé.

3 Équations du second degré

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(a) $z^2 + z + 1 = 0$;
(b) $z^2 + (1 + \mathrm{i})\,z + \mathrm{i} = 0$;
(c) $z^2 + 5\mathrm{i}z - 4 = 0$;
(d) $9z^2 - 3(3 - \mathrm{i})\,z + 4 - 3\mathrm{i} = 0$;
(e) $(1 + \mathrm{i})z^2 + 2\mathrm{i}z + 4(1 - \mathrm{i}) = 0$;
(f) $z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 + 2\mathrm{i} = 0$;
(g) $\mathrm{i}z^2 + \mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i} = 0$;
(h) $z^2 - 2^{\theta+1}\cos\theta\ z + 2^{2\theta} = 0$.

Exercice 17

Résoudre les équations suivantes, sachant qu'elles admettent une racine réelle :

(a) $z^3 - (3 + 2\,\mathrm{i})\ z^2 + (3 + 11\,\mathrm{i})\ z - 2\,(1 + 7\,\mathrm{i}) = 0$;
(b) $2z^3 - (5 + 6\,\mathrm{i})\,z^2 + 9\mathrm{i}\,z - 3\mathrm{i} + 1 = 0$.

Exercice 18

Résoudre l'équation $\left(z^2 + z + 1\right)^2 + 1 = 0$ sur $\mathbb{C}$.

4 Nombres complexes et géométrie plane

Exercice 19

À tout point M d'affixe $z \neq 1$ on associe M' d'affixe $\frac{z-1}{1-\bar{z}}$. Démontrer que

(a) $|z'| = 1$;
(b) $\frac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$;
(c) $\frac{z'+1}{z-1} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ (“imaginaire pur”).

Exercice 20

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que les points M, I et M' d'affixes respectifs z, i et $\mathrm{i}z$ soient alignées.
2. Même question avec z, z^2 et z^5.

Exercice 21

Déterminer les complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle rectangle.
[On distinguera selon que celui-ci a son angle droit en z, z^2 ou z^3.]

Exercice 22

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}\right) = 0.$$

Exercice 23

Soient A, B, C trois points distincts du plan d'affixes a, b, c. Démontrer qu'il y a équivalence entre

(a) Le triangle (A, B, C) est équilatéral ;
(b) L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet pour solution j ou $\bar{\mathrm{j}}$;
(c) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice 24

Déterminer l'ensemble des complexes $z \neq 0$ tels que les points d'affixes 1, z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ soient *cocycliques* (càd situées sur un même cercle).

Exercice 25

1. Soient α, $\beta \in\ ]-\pi, \pi[$, $\alpha \neq \beta$. Déterminer les maxima de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $t \mapsto \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right| + \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\right|$.
2. En déduire que le périmètre maximum d'un polygone à n côtés inscrit dans un cercle est obtenu si et seulement si le polygone est régulier.