PCSI - exercices de mathématiques

Champs de vecteurs

Exercice 1

Le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ? On précisera l'ouvert Ω de définition de $\vec{V}$.

1. $\vec{V} = (y+z)\,\vec{\imath} + (z+x)\,\vec{\jmath} + (x+y)\,\vec{k}$;
2. $\vec{V} = \frac{y}{x^2+y^2}\vec{\imath} - \frac{x}{x^2+y^2}\vec{\jmath}$;
3. $\vec{V} = \left(\arctan \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2}\right)\,\vec{\imath} + \frac{x^2}{x^2+y^2}\vec{\jmath}$

   (Expliciter le cas échéant un potentiel scalaire f).

Exercice 2

Déterminer l'application φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ pour que le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire :

1. $\vec{V} = \varphi\left(x^2+y^2\right)\left[\vec{\imath} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}\vec{\jmath}\right]$;
2. $\vec{V} = \varphi\left(x^2-y^2\right)\left[\left(x^2+y^2+1\right)\,\vec{\imath} - 2xy\,\vec{\jmath}\right]$

   (et expliciter un potentiel scalaire f) ;
3. $\vec{V} = \varphi\left(x^2+y^2\right)\left[\frac{y}{1+x^2}\,\vec{\imath} + \frac{x}{1+y^2}\vec{\jmath}\right]$;
4. $\vec{V} = \varphi(z)\left[2xz\,\vec{\imath} - 2yz\,\vec{\jmath} + \left(y^2-x^2\right)\,\vec{k}\right]$;
5. $\vec{V} = \varphi(z)\left[y^2z\,\vec{\imath} + 2xy\,\vec{\jmath} - 2xy^2\,\vec{k}\right]$.

Exercice 3

Calculer le rotationnel de

$$\vec{V} = \varphi\left(x^2+y^2+z^2\right)\left[x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right]$$

En déduire φ pour que $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.

Exercice 4

Déterminer φ, $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que le champ de vecteurs $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire :

1. $\vec{V} = \varphi(y)\,\mathrm{e}^x\,\vec{\imath} + \psi(x)\,\mathrm{e}^x\,\vec{\jmath}$;
2. $\vec{V} = 2xz\,\vec{\imath} + \varphi(y)\,\psi(z)\,\vec{\jmath} + \left(x^2 + \frac{y^2}{2}\right)\,\vec{k}$

   (et expliciter un potentiel scalaire).

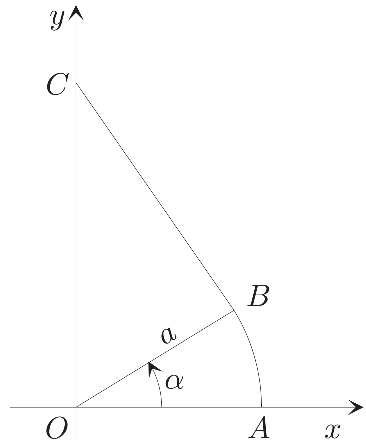
Exercice 5

Déterminer $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable pour que l'application f de deux (*resp.* trois) variables ait un laplacien nul ($\Delta\varphi = 0$).

1. $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$;
2. $f(x,y,z) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$;
3. $f(x,y,z) = \varphi\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$;
4. $f(x,y) = \varphi\left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} y}\right)$.

Exercice 6

1. Calculer la circulation $I(\alpha) = \int_\gamma \vec{V}\,\mathrm{d}\vec{M}$ du champ de vecteurs $\vec{V} = \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{\jmath}$ le long de l'arc $\gamma = ABC$ représenté ci-dessous :

   Quelle remarque peut-on faire ?
2. $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?
3. Calculer $\lim_{\alpha\to 0^+} I(\alpha)$.

Exercice 7

On définit le champ de vecteurs $\vec{V}$ sur $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ par :

$$\vec{V}(M) = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{OM}\right\|^3}\,\overrightarrow{OM}.$$

(où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne).

1. Expliciter les coordonnées P, Q, R de $\vec{V}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ en fonction des coordonnées x, y, z de $\overrightarrow{OM}$.
2. Démontrer que $\vec{V}$ est *solénoïdal* sur Ω, càd que sa divergence $\operatorname{div}\vec{V}$ est identiquement nulle sur Ω.
3. Calculer le flux (sortant) Φ de $\vec{V}$ à travers la sphère unité de $\mathbb{R}^3$.
4. $\vec{V}$ dérive-t-il d'un potentiel vecteur sur Ω ?

   [*Indication* : utiliser la formule de Stokes.]

   Quelle remarque peut-on faire ?