PCSI - exercices de mathématiques

Calcul différentiel

Exercice 1

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2} \text{ si } (x_1,x_2)\neq(0,0)\ ;\ f(0,0)=0.$$

1. Démontrer que f admet des dérivées partielles D_1f et D_2f en tout point de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que cependant f n'est pas *continue* en le point $(0,0)$.

Exercice 2

Donner l'expression de la différentielle en $(0,0)$ de l'application :

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ ;\ (x_1,x_2)\mapsto \mathrm{e}^{x_1^2x_2}\sin(x_1+x_2).$$

Exercice 3

L'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_2^4}{x_1^2+x_2^2} \text{ si } (x_1,x_2)\neq(0,0)\ ;\ f(0,0)=0$$

est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4

On considère l'application $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} g(x_1,x_2) &= \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1^2}}+\mathrm{e}^{-\frac{2}{x_2^2}}} \text{ si } x_1x_2\neq 0\ ;\\ g(x_1,x_2) &= 0 \text{ si } x_1x_2=0. \end{aligned}$$

1. En constatant que $g=f\circ h$ où f est la fonction de l'ex. 1 et $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est définie par

   $$\begin{aligned} h(x_1,x_2) &= \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1^2}},\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_2^2}}\right) \text{ si } x_1x_2\neq 0\ ;\\ h(x_1,x_2) &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

   montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
2. Démontrer que g admet des dérivées partielles à tout ordre en $(0,0)$.
   Ainsi : *la fonction g admet des dérivées partielles à tout ordre en tout point de $\mathbb{R}^2$.*
3. Démontrer que cependant, g n'est même pas *continue* en $(0,0)$.

Exercice 5

On pose si $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$f(x_1,x_2)=\ln\left(x_1+\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right)$$

lorsque cette expression est définie.

1. Déterminer le domaine de définition U de f. Quelle est la nature topologique de U ?
2. Prouver (sans calcul) que f est $\mathcal{C}^1$ sur U.
3. Donner l'expression de $\mathrm{d}f(1,1)\bullet(a,b)$ si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
4. Comment faut-il choisir le vecteur $\vec{n}=(a,b)$ *unitaire*[1] pour que la dérivée précédente en $(1,1)$ selon $\vec{n}$ soit maximale ?

Exercice 6

On considère l'application f définie par :

$$f:\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x_1,x_2) & \mapsto & \frac{\sin x_1x_2}{|x_1|+|x_2|} \text{ si } (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

1. Démontrer que f est continue en $(0,0)$.
2. Démontrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7

On considère l'application f définie par :

$$f:\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x_1,x_2) & \mapsto & \sqrt{|x_1x_2|}\sin\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\\ & & \text{si } (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

1. Démontrer que f est continue en $(0,0)$.
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? [On pourra étudier les dérivées directionnelles en $(0,0)$.]

Exercice 8 *(fonction de* Peano*)*

Soit l'application f définie par :

$$f:\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}\\ (x_1,x_2) & \mapsto & \frac{x_1x_2(x_1^2-x_2^2)}{x_1^2+x_2^2} \text{ si } (x_1,x_2)\neq(0,0)\\ (0,0) & \mapsto & 0 \end{array}$$

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, que D_1f et D_2f existent et sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2$.

[1] càd, de norme *euclidienne* ($\|\cdot\|_2$) égale à 1.

2. Démontrer que $D^2_{1,2}f$ et $D^2_{2,1}f$ existent et sont continues en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

3. Démontrer que $D^2_{1,2}f\,(0,0) = 1$ et $D^2_{2,1}f\,(0,0) = -1$. L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9

On considère l'application f définie par :

$$f(x_1,x_2) = \frac{x_1^3}{x_1^2+x_2^2} \text{ si } (x_1,x_2) \neq (0,0) \text{ ; } f(0,0) = 0$$

1. Démontrer que $D_1 f$ et $D_2 f$ existent et sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $u \in \mathbb{R}^2$, $||u||_2 = 1$. Démontrer que la dérivée de f en $(0,0)$ selon u, $\vec{f}'_u(0,0)$, existe et que $\left|\vec{f}'_u(0,0)\right| \leq 1$.

3. Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable (càd un arc paramétré de $\mathbb{R}^2$) telle que $\gamma^{-1}\langle\{(0,0)\}\rangle = \{0\}$ et $\vec{\gamma}'(0) \neq \vec{0}$. On pose $g(t) = f(\gamma(t))$.
   Démontrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que malgré tout, f n'est pas $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   [On pourra comparer, si $u = (u_1,u_2)$, $f'_u(0,0)$ et $D_1 f(0,0)\,u_1 + D_2 f(0,0)\,u_2$.]

Exercice 10 *(Fonctions homogènes)*

- On appelle *cône ouvert* de $\mathbb{R}^2$ toute partie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ telle que : $\forall x \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $t\,x \in \Omega$.
- Si Ω est un cône ouvert de $\mathbb{R}^2$, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ on dit que f est *homogène de degré* α si :

$$\forall x \in \Omega,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(t\,x) = t^\alpha f(x).$$

Soit Ω un cône ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ sur Ω et si $a \in \Omega$ calculer la dérivée de $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(a + t\,x)$ où $x \in \Omega$.

2. Démontrer le résultat suivant, appelé *th. d'*EULER :
   Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, si $\alpha \in \mathbb{R}$ il y a équivalence entre :
   (a) f est homogène de degré α.
   (b) $\mathrm{d}f(x) \bullet x = \alpha\, f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.
   [*Indication* : pour (a) $\Rightarrow$ (b) on utilisera la fonction $g : t \mapsto f(t\,x)$. Pour (b) $\Rightarrow$ (a) on remplacera x par $t\,x$ dans (b) puis on dérivera $\frac{1}{t^\alpha} f(t\,x)$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.]

3. Vérifier la formule (b) pour l'application f définie pour $x_1 \neq 0$ par : $f(x_1,x_2) = x_2 \arctan \frac{x_2}{x_1}$.

Exercice 11

Rechercher les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de :

1. $f(x_1,x_2) = 2x_1^3 - 3x_1^2 + 2x_2^3 + 3x_2^2$;

2. $f(x_1,x_2) = 2x_1^3 + 6x_1x_2^2 - 3x_1^2 + 3x_2^2$;

3. $f(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2 + (47 - x_1 - x_2)(\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4})$ (préciser la nature des extrema de f) ;

4. $f(x_1,x_2) = x_1\,\mathrm{e}^{x_2} + x_2\,\mathrm{e}^{x_1}$.

Exercice 12

On pose $f(0,0) = 0$ et si $(x_1,x_2) \neq (0,0)$,

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2x_2 - \frac{4x_1^6x_2^2}{(x_1^4+x_2^2)^2}.$$

1. Démontrer que si $(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $4x_1^4x_2^2 \leq (x_1^4+x_2^2)^2$. En déduire que f est continue.

2. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0,2\pi]$ soit l'application $g_\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_\theta(t) = f(t\cos\theta, t\sin\theta)$.
   Démontrer que $g_\theta(0) = g'_\theta(0) = 0$ et $g''_\theta(0) > 0$, en donner l'interprétation géométrique.
   [On pourra comparer g_θ et sa formule de MACLAURIN.]

3. Démontrer que cependant f n'admet pas de minimum local en $(0,0)$.
   [On pourra considérer $f(x_1,x_1^2)$.]

Exercice 13

Déterminer l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ par $\varphi(x_1,x_2) = f(\frac{x_2}{x_1})$ vérifie :

$$\Delta\varphi = D^2_{1,1}\varphi + D^2_{2,2}\varphi = 0.$$

Exercice 14 *Différentiation implicite*

On se place dans $\mathbb{R}^3$ et on note x, y, z les coordonnées. On considère une "surface" de $\mathbb{R}^3$ représentée par l'équation ("d'état")

$$F(x,y,z) = 0,$$

F étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

On admet que cette équation définit localement ("implicitement" [2]) x (*resp.* y, z) comme fonction de (y,z) (*resp.* (x,z), (x,y)) et on écrit $x = X(y,z)$ (*resp.* $y = Y(x,z)$, $z = Z(x,y)$). On admet en outre que les fonctions X, Y et Z ainsi obtenues sont $\mathcal{C}^1$ sur leurs ouverts de définition respectifs.

On se place enfin en un point (x_0,y_0,z_0) de $\mathbb{R}^3$ en lequel aucune dérivée partielle de F ne s'annule.

1. En calculant la première dérivée partielle de l'égalité $F(x,y,Z(x,y)) = 0$, démontrer que

$$D_1 Z(x_0,y_0) = \frac{\partial Z}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{D_1F(x_0,y_0,z_0)}{D_3F(x_0,y_0,z_0)}.$$

2. Déterminer de même des expressions de $\frac{\partial X}{\partial y}(x_0,z_0)$ et $\frac{\partial Y}{\partial z}(x_0,z_0)$.

3. En déduire la relation

$$\frac{\partial Z}{\partial x}(x_0,y_0)\,\frac{\partial X}{\partial y}(x_0,z_0)\,\frac{\partial Y}{\partial z}(x_0,z_0) = -1.$$

   Cela ne vous rappelle-t-il rien ? Quelle autre relation similaire pourrait-on obtenir par le même principe ? Que deviendrait ce résultat si l'on se plaçait dans $\mathbb{R}^4$ plutôt que dans $\mathbb{R}^3$?

[2] Voir cours de spé.