PCSI - exercices de mathématiques

Approximation

Dans les trois exercices suivants, on désignera par C_p une calculatrice pouvant représenter p chiffres significatifs. Si $x \in \mathbb{R}$, on notera x^* le *réel-machine* correspondant à x, càd la représentation de x dans la machine C_p. x^* dépend de p, et en général, $x \neq x^*$.

Par exemple, sur une machine de type C_{10}, si $x = \ln 2$, $x^* = 0,693\,147\,180\,5 = \frac{1386294361}{2000000000} \neq x$.

Exercice 1 *opérations arithmétiques-machine*

On envisage une calculatrice C_3 par souci de simplicité.

1. Déterminer des réels-machine x^*, y^*, z^* tels que $((x^* + y^*) + z^*)^* \neq (x^* + (y^* + z^*))^*$.
Ainsi *l'addition-machine n'est pas associative.*
On supposera dans la suite que les expressions-machine sont évaluées de gauche à droite.

2. Soit pour x, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$ l'expression (égale à 1)
$$E(x,y) = \frac{x+y-x}{y}.$$
Déterminer un réel $\alpha \neq 1$ et des valeurs de x et y telles que l'expression-machine $E^*(x,y) = (E(x,y))^*$ soit égale à α^*.
Qu'en résulte-t-il pour l'addition-machine ?

Exercice 2 *suite constante "machine-divergente"*

Soit ω un réel > 0. On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on définit
$$x_{n+1} = (\omega + 1)\ x_n - 1.$$

1. Démontrer que la suite $\left(x_n - \frac{1}{\omega}\right)$ est géométrique. Préciser sa raison.

2. Quand la suite (x_n) peut-elle être convergente ?

3. Soit une calculatrice C_p.
   (a) Pourquoi existe-t-il un réel $\omega > 0$ que C_p ne peut pas représenter exactement (càd $\omega \neq \omega^*$) ?
   (b) Soit $x_0 = \frac{1}{\omega}$. Que peut-on dire de la suite (x_n) ? De la suite-machine (x_n^*) ?

Exercice 3 *suite divergente "machine-constante"*

On fixe $x_0 > 0$ et on définit
$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}.$$

1. Que peut-on dire de la suite (x_n) ?

2. On utilise une calculatrice C_p. On fixe $x_0 > 10^{p/2}$. Que peut-on dire de la suite-machine (x_n^*) ?

Exercice 4

On définit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto \frac{x^3+1}{3}$.

1. Démontrer que f a trois points fixes sur $\mathbb{R}$, notés ξ, ξ' et ξ'', tels que $-2 < \xi < -1 < 0 < \xi' < 1 < \xi'' < 2$.

2. Démontrer que la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ admet pour limite $-\infty$ si $x_0 < \xi$, ξ' si $\xi < x_0 < \xi''$ et $+\infty$ si $\xi'' < x_0$.

3. Que peut-on en conclure quant à la possibilité d'approximer ξ, ξ' et ξ'' grâce au th. du point fixe ?

Exercice 5

On définit l'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}\ ;\ x \to x + \frac{1}{1+e^x}$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et que $0 < f'(x) < 1$ pour tout réel x.

2. Démontrer que f n'a pas de point fixe sur $\mathbb{R}$. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la suite (x_n) ?
L'application f est-elle contractante ? Comparer cette situation avec celle du théorème du point fixe.

Exercice 6 *point fixe répulsif*

On définit une suite (x_n) par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec f dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que ξ est point fixe de f (càd, $f(\xi) = \xi$) et que $|f'(\xi)| > 1$.

1. On choisit $k \in\ ]1, f'(\xi)[$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|t - \xi| < \alpha \Rightarrow |f(t) - \xi| \geq k\,|t - \xi|$.

2. On choisit $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |x_n - \xi| < \alpha$. Démontrer que $|x_n - \xi| \geq k^{n-N}\,|x_N - \xi|$ pour $n \geq N$.

3. En déduire que si (x_n) converge vers ξ, (x_n) est stationnaire en ξ.

Exercice 7 *point fixe attractif, superattractif*

On considère cette fois une suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On suppose que f admet un point fixe ξ.

1. Rappeler pourquoi, si $|f'(\xi)| < 1$ et si x_0 est assez proche de ξ, (x_n) converge vers ξ.

2. On suppose que $f'(\xi) = f''(\xi) = ... = f^{(p-1)}(\xi) = 0$; $f^{(p)}(\xi) \neq 0$.
   (a) En utilisant Taylor-Lagrange, démontrer qu'il existe $c_n \in\ ]\xi, x_n[$ tel que :
$$x_{n+1} - \xi = \frac{f^{(p)}(c_n)}{p!}(x_n - \xi)^p.$$

(b) En déduire que

$$x_{n+1} - \xi \sim K\,(x_n - \xi)^p$$

où $K = \frac{f^{(p)}(\xi)}{p!}$. Que signifie ce résultat pour la vitesse de convergence de la suite (x_n) ?

Exercice 8 *Analyse de la méthode de* Newton

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, +\infty[$ telle que $f(a) < 0$; $f' \geq m_1 > 0$; $0 \leq f'' \leq M_2$. On fixe x_0 tel que $f(x_0) > 0$ et on note ξ l'unique réel[1] de $]a, +\infty[$ tel que : $f(\xi) = 0$.

On définit la suite (x_n) par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Démontrer par récurrence sur n que $x_n \geq \xi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que (x_n) est décroissante et converge vers ξ.
   On pose dans la suite $\varepsilon_n = x_n - \xi$ pour tout n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe $c_n \in \ ]\xi, x_n[$ tel que : $\varepsilon_{n+1} = \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}\ \varepsilon_n^2$.

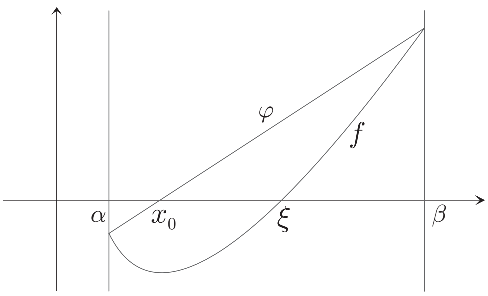
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{M_2}{2m_1}\ \varepsilon_n^2$.
   On pose désormais $\varepsilon'_n = \frac{M_2}{2m_1}\varepsilon_n$.

   (b) $0 \leq \varepsilon'_n \leq (\varepsilon'_0)^{2^n}$. Discuter.

Exercice 9

Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[\alpha, \beta]$. On suppose que $f(\alpha)\,f(\beta) < 0$, donc f s'annule en un point ξ de $[\alpha, \beta]$. On note φ la fonction affine coïncidant avec f en α et en β, et x_0 sa valeur d'annulation :



1. *Erreur d'approximation* : démontrer que si $x \in [\alpha, \beta]$ il existe $c \in \ ]\alpha, \beta[$ tel que

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{2} f''(c)\,(x - \alpha)\,(x - \beta)\,.$$

2. *Erreur d'interpolation* : en déduire qu'il existe $d \in \ ]\alpha, \beta[$ tel que

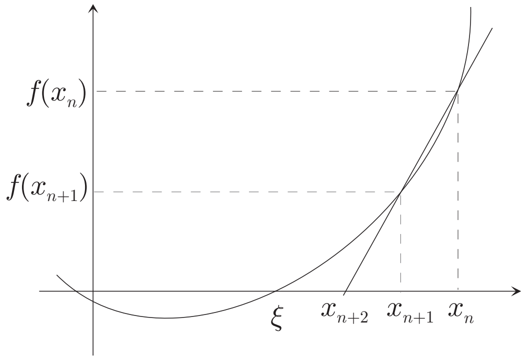
$$x_0 - \xi = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(d)}\,(x_0 - \alpha)\,(x_0 - \beta)\,.$$

[1] On justifiera l'existence de x_0 et ξ.

Exercice 10 *Méthode de* Lagrange *(et analyse)*

On se place sous les mêmes hypothèses que pour l'exercice 8, et on utilisera l'exercice 9.

On fixe $x_0 > x_1 > \xi$ et on définit de proche en proche x_{n+2} comme l'abscisse du point d'intersection avec l'axe Ox de la sécante à la courbe de f en $(x_n, f(x_n))$ et $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$:



1. Démontrer que cela conduit à poser pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+2} = \frac{x_n f(x_{n+1}) - x_{n+1} f(x_n)}{f(x_{n+1}) - f(x_n)}.$$

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $x_n \geq x_{n+1} \geq \xi \Rightarrow x_{n+1} \geq x_{n+2}$.

3. Démontrer qu'il existe c_n, $d_n \in \ ]\xi, x_{n+2}[$ tels que :

$$x_{n+2} - \xi = \frac{1}{2}\frac{f''(c_n)}{f'(d_n)}(x_{n+2} - x_n)(x_{n+2} - x_{n+1})$$

   [Utiliser l'ex. 9.]

4. En déduire que (x_n) est décroissante et converge vers ξ.

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = x_n - \xi$. On utilise toujours les notations de l'ex. 8.

   (a) Démontrer que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+2} &\leq \frac{M_2}{2m_1}\,(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+2})\,(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+2}) \\ &\leq \frac{M_2}{2m_1}\varepsilon_n \varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

   On pose désormais $\varepsilon'_n = \frac{M_2}{2m_1}\varepsilon_n$.

   (b) Démontrer que $\varepsilon'_{n+2} \leq \varepsilon'_n \varepsilon'_{n+1}$ et en déduire que pour tout $n \geq 2$:

$$\varepsilon'_n \leq (\varepsilon'_1)^{f_{n-1}}\,(\varepsilon'_0)^{f_{n-2}}$$

   où f_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Fibonacci.

   (c) En conclure que

$$\varepsilon'_n = O\left((\varepsilon'_0)^{\tau^n}\right)$$

   où $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or.
   Comparer l'efficacité des méthodes de Lagrange et de Newton.

Exercice 11

Soit $\alpha \in \;]1,+\infty[$. On fixe $x_0 > \sqrt{\alpha}$ et on définit de proche en proche

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + x_n}{1 + x_n} \;\left(= x_n + \frac{\alpha - x_n^2}{1 + x_n}\right).$$

1. Démontrer que les deux sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (x_n) est convergente vers $\sqrt{\alpha}$.

2. Calculer $x_{n+1} - \sqrt{\alpha}$ en fonction de $x_n - \sqrt{\alpha}$ et en déduire que

$$\left|x_{n+1} - \sqrt{\alpha}\right| \sim K \; \left|x_n - \sqrt{\alpha}\right|$$

   où $K = \frac{\sqrt{\alpha}-1}{\sqrt{\alpha}+1}$.

3. De quel type de convergence s'agit-il ? Que peut-on dire de la qualité de l'approximation obtenue par rapport à celle fournie par la méthode de Héron ?

Exercice 12 *Approximation de $\sqrt[p]{\alpha}$*

On souhaite adapter la méthode de Héron pour le calcul approché d'une racine $p^{\text{ième}}$. Pour cela, on applique la méthode de Newton à partir de $x_0 > \sqrt[p]{\alpha}$, à la fonction $x \mapsto x^p - \alpha$.

1. Démontrer que cela conduit à itérer la relation de récurrence

$$x_{n+1} = \frac{p-1}{p} x_n + \frac{\alpha}{p \; x_n^{p-1}}$$

   Que donne le cas particulier $p = 2$?

2. En exploitant l'étude des méthodes de Newton et de Héron, démontrer que (x_n) est décroissante et convergente vers $\sqrt[p]{\alpha}$.

3. Démontrer que

$$x_{n+1} - \sqrt[p]{\alpha} \sim \frac{p-1}{2\sqrt[p]{\alpha}} \left(x_n - \sqrt[p]{\alpha}\right)^2.$$

   [Utiliser l'ex. 8.]
   Qu'en résulte-t-il pour l'efficacité de la méthode décrite ici ? Discuter en fonction des différentes quantités qui apparaissent dans l'équivalent obtenu.

Exercice 13 *Analyse de la méthode d'*Archimède

On note Π_n le polynôme régulier à 3.2^n côtés inscrit dans le cercle de rayon 1 et $\theta_n = \frac{\pi}{3.2^n}$ son demi-angle au sommet.

1. Rappeler pourquoi le demi-périmètre de Π_n est $p_n = 3.2^n \sin\theta_n$.

2. En déduire que $\pi - p_n \sim \frac{\pi^3}{18.4^n}$.

3. Démontrer que

$$\lim \left(\frac{\pi - p_{n+1}}{\pi - p_n}\right) = \frac{1}{4}.$$

   Qu'en résulte-t-il pour l'algorithme d'Archimède ?

Dans les exercices suivants, on étudie la méthode des trapèzes pour l'approximation d'une intégrale. On rappelle que si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $n \in \mathbb{N}^*$, la subdivision de pas constant $\frac{b-a}{n}$ est $d_n = (x_{n,i})_{0 \le i \le n}$. La somme de Riemann S_n et la $n^{\text{ième}}$ étape I_n de la méthode des trapèzes sont définies par

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),\; I_n = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(f(x_{n,i}) + f(x_{n,i+1})\right).$$

L'erreur commise en remplaçant $I = \int_{[a,b]} f$ par S_n (*resp.* par I_n) est majorée par

$$|I - S_n| \le \frac{(b-a)^2}{2n} \|f'\|_\infty \;\; ; \;\; |I - I_n| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2} \|f''\|_\infty .$$

si f est $\mathcal{C}^1$ (*resp.* $\mathcal{C}^2$) sur $[a,b]$. (*cf.* le cours "approximation" et le TD "calcul approché d'intégrales").

Exercice 14 *Comparaison* Riemann-*trapèzes*

On suppose ici $[a,b] = [0,5]$, $f = \exp$ et on souhaite comparer l'efficacité de la méthode des trapèzes (approximation de I par I_n) et par les sommes de Riemann (approximation de I par S_n, $n^{\text{ième}}$ somme de Riemann).

1. Combien valent $\|f'\|_\infty$ et $\|f''\|_\infty$ dans le cas présent ?

2. Déterminer les valeurs minimales de l'entier n pour obtenir une approximation de I par S_n (*resp.* I_n)

   (a) à 10^{-2} près ; (b) à 10^{-5} près.

3. Dans ce dernier cas, combien d'itérations de l'algorithme sont nécessaires si l'on utilise les subdivisions dichotomiques ?

Exercice 15 *Approximation des trapèzes*

On souhaite étudier l'efficacité de l'approximation par la méthode des trapèzes dans un cas où la valeur exacte de l'intégrale I est calculable.

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et on se place sur le segment $[0,1]$. On conserve les notations du cours.

1. Calculer la valeur exacte de $I = \int_{[a,b]} f$.

2. *Détermination de* $M_2 = \|f''\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f''|$:

   (a) Calculer et factoriser f'''.

   (b) En déduire les variations de f'' sur $[0,1]$ et la valeur de M_2.

3. Calculer alors la valeur minimale n_0 de n pour que I_n soit une approximation de I à 10^{-5} près. En utilisant les subdivisions dichotomiques, à combien d'étapes de l'algorithme cela correspond-il ?

4. À l'aide d'une calculatrice, comparer l'erreur effectivement commise en remplaçant I par I_{n_0} et son majorant théorique.