PCSI - mathématiques

Vocabulaire ensembliste

1 Ensembles

Il a fallu attendre la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et les travaux de Cantor pour se rendre compte que la notion d'ensemble n'était pas si intuitive qu'on l'avait imaginé. En effet, si le terme d'ensemble pouvait désigner tout groupement d'objets, on pourrait construire

$$E = \{F \mid F \notin F\} \ :$$

"ensemble" des ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes. Le problème suivant se pose : E appartient-il à E ?
- si oui, par définition des éléments de E : $E \notin E$, ce qui contredit l'hypothèse ;
- sinon, $E \notin E$ mais comme E est l'ensemble de *tous* les ensembles qui ne s'appartiennent pas : $E \in E$!

C'est le *paradoxe de* Russell.

1.1 Classes et ensembles

Définition 1 *Une* classe *est toute collection d'objets.*

Cette définition n'étant pas formelle, elle est soumise au paradoxe de Russell et aux autres contradictions du langage courant. Les ensembles seront *certaines* classes préservées des contradictions.

Notation 1 *$x \in C$ signifie "l'objet x appartient à la classe C".*

Cette notation est une abréviation dans le langage courant, qui ne deviendra une notation mathématique à part entière que lorsqu'on l'appliquera aux ensembles. On note $x \notin C$ la négation de l'énoncé $x \in C$.

1.1.1 Égalité de deux classes

Étant donné deux classe A et B : $A = B$ si et seulement si $\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

C'est une définition qui signifie que toute classe est entièrement déterminée par ses éléments.

1.1.2 Inclusion

Définition 2 *Si A et B sont deux classes on note $A \subset B$ l'énoncé : $\forall x,\ x \in A \Rightarrow x \in B$ (A est* incluse *dans B).*

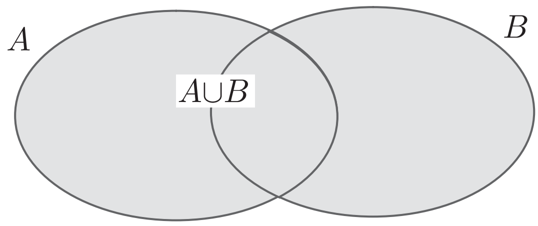
L'inclusion possède les propriétés suivantes, valables pour toutes classes A, B et C :
- $A \subset A$;
- $(A \subset B$ et $B \subset A) \Rightarrow A = B$;
- $(A \subset B$ et $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$.

1.1.3 Opérations sur les classes

Soient A et B deux classes.

Réunion

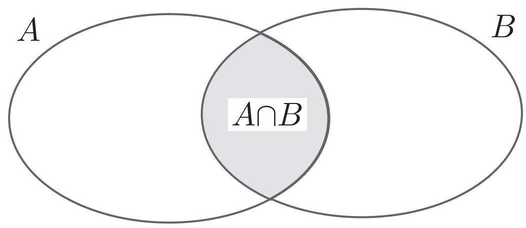
Définition 3 *On note $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ou $x \in B\}$ la classe des objets qui appartiennent à A ou à B.*



On déduit immédiatement les propriétés suivantes :
- $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$;
- $A \cup A = A$;
- $A \cup B = B \cup A$;
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Intersection

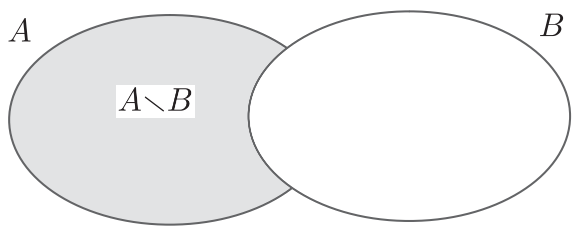
Définition 4 *On note $A \cap B = \{x \mid x \in A$ et $x \in B\}$ la classe des objets qui appartiennent à A et à B.*



On déduit immédiatement les propriétés suivantes :
- $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$;
- $A \cap A = A$;
- $A \cap B = B \cap A$;
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Différence

Définition 5 *On note $A \smallsetminus B = \{x \mid x \in A$ et $x \notin B\}$ la classe des objets qui appartiennent à A mais pas à B.*



Cette opération ne possède pas de propriété fonctionnelle particulière. On peut seulement remarquer que $A \smallsetminus B \subset A$.

1.1.4 Ensembles

La notion d'ensemble est si fondamentale qu'elle ne se définit pas à proprement parler. Tout au plus peut-on décrire par un groupe d'axiomes leur fonctionnement. On se contentera de la caractérisation suivante :

Définition 6 *Un* ensemble *est une classe E qui est également un objet, càd qui appartient à au moins une autre classe C ($E \in C$).*

Intuitivement, un ensemble est une classe "pas trop grosse". On adopte également les axiomes suivants :

Axiome 1 *Il existe au moins un ensemble.*

Axiome 2 (compréhension) *Si E est un ensemble et si P est un prédicat à une variable libre, $\{x \in E \mid P(x)\}$ est un ensemble.*

On peut ainsi définir l'ensemble des objets d'un ensemble préexistant qui vérifient une certaine "propriété".

Axiome 3 *Si E est un ensemble, si C est une classe et si $C \subset E$, alors C est un ensemble.*

Cet axiome supporte la notion intuitive d'ensemble. Notons qu'il en résulte que si E et F sont des ensembles, il en est de même de $E \cap F$ et de $E \setminus F$. Par contre pour la réunion, un axiome est nécessaire :

Axiome 4 (réunion) *Si E et F sont des ensembles, $E \cup F$ est un ensemble.*

Cet axiome admet une version plus générale.

1.2 Constructions d'ensembles

1.2.1 Ensemble vide

Proposition 1 *Il existe un unique ensemble A ne contenant aucun objet : $\forall x,\ x \notin A$.*

Définition 7 *A est l'*ensemble vide *noté $\varnothing$.*

Cet ensemble fonctionne de la manière suivante :
- $\varnothing$ est un ensemble et $\forall x,\ x \notin \varnothing$;
- Pour toute classe A, $\varnothing \subset A$;
- Pour tout ensemble E, $E \subset \varnothing \Rightarrow E = \varnothing$.

1.2.2 Singletons

Axiome 5 *Si a est un objet, il existe un unique ensemble A ayant a pour seul élément : $\forall x,\ x \in A \Leftrightarrow x = a$.*

Définition 8 *A est le* "singleton-a" *noté $\{a\}$.*

Il résulte immédiatement de la définition que : $\{a\} = \{b\} \Leftrightarrow a = b$ et : $a \neq b \Leftrightarrow \{a\} \cap \{b\} = \varnothing$.

1.2.3 Paires

Définition 9 *Si a et b sont des objets la* paire-a, b *est*

$$\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} = \{x \mid x = a \text{ ou } x = b\}$$

C'est un ensemble (axiomes 4 et 5) dont les seuls objets sont a et b.

On déduit facilement de la définition :
- $\{a, b\} = \{b, a\}$;
- $\{a, a\} = \{a\}$ et plus généralement :
- $\{a, b\} = \{c\} \Leftrightarrow a = b = c$.

1.2.4 Ensemble des parties

Une partie d'un ensemble E est une classe (nécessairement un ensemble) incluse dans E.

Axiome 6 *Si E est un ensemble, il existe un unique ensemble $\mathcal{A}$ dont les objets sont exactement les parties de E : $X \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \subset E$.*

Définition 10 *$\mathcal{A}$ est l'*ensemble des parties *de E noté $\mathcal{P}(E)$.*

Exemple 1

1. $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$;
2. $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\varnothing, \{a\}\}$;
3. $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ *etc.*

Les remarques suivantes résultent de la définition :
- $X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E$;
- $\varnothing \in \mathcal{P}(E)$; $E \in \mathcal{P}(E)$;
- en particulier, $\mathcal{P}(E) \neq \varnothing$.

1.2.5 Couple

Soient a, b deux objets. On pose $(a, b) \overset{\text{déf.}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$: *couple-a, b*. Cette définition n'a d'autre but que de fournir le résultat suivant :

Théorème 1 (du couple) *Pour tous objets a, b, a', b' :*

$$(a, b) = (a', b') \Rightarrow (a = a' \text{ et } b = b').$$

Remarque 1 *Contrairement à la paire, le couple permet de distinguer un premier et un second objet. L'ordre des objets dans un couple a de l'importance, notamment : $a \neq b \Rightarrow (a, b) \neq (b, a)$.*

La notion de couple se généralise facilement :
- $(a, b, c) = (a, (b, c))$ (triplet) ;
- $(a, b, c, d) = (a, (b, c, d))$ (quadruplet, etc.)

1.3 Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles.

Définition 11 *Le* produit *(cartésien) de E et F est*

$$\begin{aligned} E \times F &= \{z \mid \exists x \in E,\ \exists y \in F,\ z = (x, y)\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in E,\ y \in F\} \ : \end{aligned}$$

ensemble[1] *des couples formés d'un élément de E et d'un élément de F.*

$E \times F$ est donc différent de $F \times E$ en général. Si $z = (x, y) \in E \times F$ on note $x = p(z)$ (*resp.* $y = q(z)$) : première (*resp.* seconde) projection de z.

Le produit cartésien vérifie, pour tous ensembles E, F, G :
- $E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$;
- $E \times (F \cap G) = (E \times F) \cap (E \times G)$;
- $E \times (F \setminus G) = (E \times F) \setminus (E \times G)$

et de même lorsque l'ordre des termes est inversé.

[1] en effet : si $z \in E \times F$, $z = (x, y)$ où $x \in E$, $y \in F$. Par suite $z = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ et $\{x\}$, $\{x, y\}$ appartiennent à $\mathcal{P}(E \cup F)$ d'où $z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E \cup F))$ et finalement : $E \times F \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(E \cup F))$.

2 Applications

Définition 12 *Une* application f *est un triplet* (E, F, Γ) *où*

- E *est un ensemble :* ensemble de départ *ou* source *ou* domaine *de* f *;*
- F *est un ensemble :* ensemble d'arrivée *ou* but *de* f *;*
- Γ *est une partie de* $E \times F$ *(*graphe *de* f*) vérifiant*

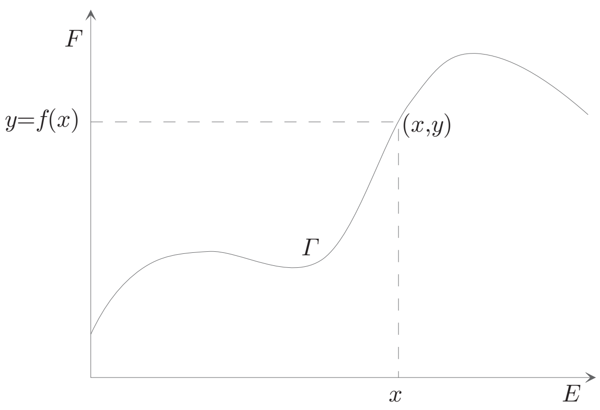
(G1) $\forall x \in E, \exists y \in F, (x, y) \in \Gamma$ *;*

(G2) $\forall x \in E, \forall y \in F, \forall y' \in F,$
$[(x, y) \in \Gamma$ *et* $(x, y') \in \Gamma] \Rightarrow y = y'$.

On dit que f est une application de E dans F. On déduit de cette définition que si $x \in E$, *il existe* (condition G1) un *unique* (condition G2) élément de F tel que $(x, y) \in \Gamma$.

Définition 13 y *est l'*image *de* x *par* f*, noté* $f(x)$*.* x *est* ***un*** antécédent *de* y *par* f*.*

Notation 2 $f : E \to F \ ; \ x \mapsto f(x)$ *ou* $E \xrightarrow{f} F$.



Exemple 2

1. *applications* constantes *: si* $b \in F$*, l'application constante en* b *est* $c_b : E \to F \ ; \ x \mapsto b$.
2. *application* identité *d'un ensemble* E *: c'est l'application* $\mathrm{Id}_E : E \to E \ ; \ x \mapsto x$.
3. *application* caractéristique *d'une partie* A *d'un ensemble* E *: c'est l'application* $\chi_A : E \to \{0, 1\}$ *définie par* $\chi_A(x) = 1$ *si* $x \in A$*,* $\chi_A(x) = 0$ *si* $x \notin A$*.*
4. *projections* $p : E \times F \to E \ ; \ (x, y) \mapsto x$ *et* $q : E \times F \to F \ ; \ (x, y) \mapsto y$.

2.1 Égalité de deux applications

Soient f et g deux applications. On a $f = g$ si et seulement si f et g ont

- même ensemble de départ E ;
- même ensemble d'arrivée F ;
- même graphe, càd : $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Notation 3 *L'ensemble des applications de* E *dans* F *est noté* $\mathcal{F}(E, F)$ *ou* F^E *.*

2.2 Familles indexées

Soit I un ensemble.

Définition 14 *Une* famille indexée *par* I *est une application de domaine* I*.*

Si x est une telle famille on remplace la notation générale $x : I \to E \ ; \ i \mapsto x(i)$ par $x(i) = x_i$ pour tout $i \in I$ et :

$$x = (x_i)_{i \in I}$$

Exemple 3

- $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *est une famille de rationnels indexée par* $\mathbb{N}^*$.
- $(] - \alpha, \alpha[)_{\alpha \in \mathbb{R}_+^*}$ *est une famille d'intervalles de* $\mathbb{R}$ *indexée par* $\mathbb{R}_+^*$.

2.2.1 Egalité de deux familles

Deux familles $x = (x_i)_{i \in I}$ et $y = (y_i)_{i \in I}$ sont égales si et seulement si : $\forall i \in I, x_i = y_i$.

On peut donc considérer la notion de famille indexée comme la généralisation du couple, la remarque précédente généralisant le th. du couple.

2.2.2 Union, intersection d'une famille de parties d'un ensemble

Soient E un ensemble, I un ensemble d'indices et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E indexée par I. On pose

- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$;
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$.

Remarque 2 *L'indice* i *est* muet*, il* ne *figure* pas *dans ces définitions.*

Exemple 4

- $\bigcup_{i \in \varnothing} A_i = \varnothing$ *;* $\bigcap_{i \in \varnothing} A_i = E$ *;*
- $\bigcup_{i \in \{p\}} A_i = A_p$ *;* $\bigcap_{i \in \{p\}} A_i = A_p$ *;*
- $\bigcup_{i \in \{p,q\}} A_i = A_p \cup A_q$ *;* $\bigcap_{i \in \{p,q\}} A_i = A_p \cap A_q$.

Ainsi on a bien de généralisé les définitions 3 et 4.

2.3 Composée de deux applications

Soient E, F, G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G.

Définition 15 *La* composée *de* f *et* g *est l'application de* E *dans* G *notée* $g \circ f$ *définie par*

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

pour tout $x \in E$.

La composition des applications est "associative" :

Proposition 2 *Dans la situation* $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ *on a*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

L'identité joue un rôle important vis-à-vis de la loi $\circ$:

Proposition 3 *Si* f *est une application de* E *dans* F*,* $\mathrm{Id}_F \circ f = f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

2.4 Injections, surjections, bijections

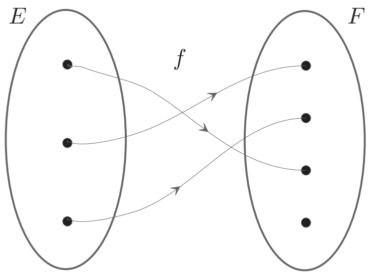
f est une application de E dans F (ensembles).

Définition 16 *f est* injective *(ou : une* injection*) de E dans F si $\forall x \in E$, $\forall x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.*

On peut contraposer cette définition en $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. Elle signifie que deux objets distincts de l'ensemble de départ E ont des images distinctes dans l'ensemble d'arrivée F, ou encore que tout élément de F a *au plus* un antécédent par f dans E.

Exemple 5

- *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2$ n'est pas injective.*
- *$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^2$ est injective.*
- *l'application f ci-dessous est injective (mais pas surjective, cf. déf. 17) :*



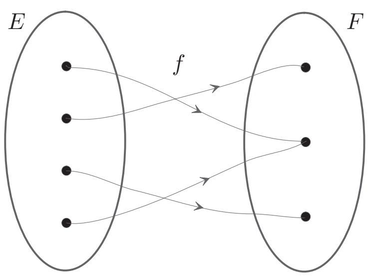
Proposition 4 *Si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, si f est injective de E dans F et si g est injective de F dans G, $g \circ f$ est injective de E dans G.*

Définition 17 *f est* surjective *(ou : une* surjection*) de E sur F si $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $y = f(x)$.*

Cette définition signifie que tout élément de F a *au moins* un antécédent par f dans E.

Exemple 6

- *les applications f et g précédentes ne sont pas surjectives.*
- *$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$; $x \mapsto x^2$ est surjective.*
- *l'application f ci-dessous est surjective (mais pas injective) :*



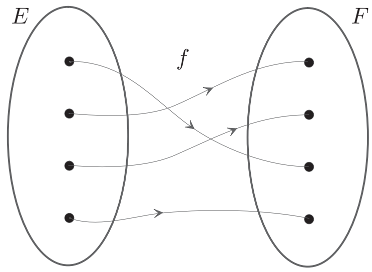
Proposition 5 *Si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, si f est surjective de E sur F et si g est surjective de F sur G, $g \circ f$ est surjective de E sur G.*

Définition 18 *f est* bijective *(ou : une* bijection*) de E sur F si f est injective de E dans F et surjective de E sur F.*

Cela signifie donc que tout élément de F a *exactement* un antécédent par f dans E.

Exemple 7

- *les applications f, g et h précédentes ne sont pas bijectives.*
- *$k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$; $x \mapsto x^2$ est bijective.*
- *l'application f ci-dessous est bijective :*



Proposition 6 *Si $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, si f est bijective de E sur F et si g est bijective de F sur G, $g \circ f$ est bijective de E sur G.*

Supposons que f soit une bijection de E sur F. Si $y \in F$, y admet un unique antécédent x par f. Notons-le $f^{-1}(y)$. On définit ainsi une application $f^{-1} : F \to E$. Par définition, $f^{-1}(y)$ est l'antécédent de y par f donc : $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$. D'autre part, si $x \in E$, l'unique antécédent de $f(x)$ par f est bien évidemment x, donc : $f^{-1}(f(x)) = x$.

Définition 19 *f^{-1} est la* réciproque *de f.*

Elle vérifie $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$. Ces relations sont en fait caractéristiques d'une application bijective :

Proposition 7 *Soit $f : E \to F$ une application. S'il existe une application $g : F \to E$ telle que*

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \ \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_F \ ,$$

alors f est bijective, g aussi et : $g = f^{-1}$.

Corollaire 1 *La réciproque d'une bijection de E sur F est une bijection de F sur E.*

Exemple 8 *La réciproque de la bijection k de l'exemple 7 est l'application $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$; $y \mapsto \sqrt{y}$.*

2.5 Restriction, prolongement

Soient $f : E \to F$ une application et A une partie de E.

Définition 20 *La* restriction *de f à A est*

$$f_{|A} : \begin{array}{l} A \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

Exemple 9 *Dans les exemples 5 à 7 précédents, g est la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ et h est la restriction de k à $\mathbb{R}_+$.*

Ceci montre que $f_{|A}$ n'a pas nécessairement les mêmes propriétés que f. Par contre on a toujours :

Proposition 8 *Si f est injective de E dans F, $f_{|A}$ est injective de A dans F.*

Le prolongement est en quelque sorte l'opération inverse de la restriction. Contrairement à celle-ci, il n'est pas unique.

Définition 21 *Soit f une application de E dans F. Si H est un ensemble contenant E et si $g : H \to F$ est une application telle que $f = g_{|E}$ on dit que g est* ***un*** prolongement *de f à H.*

2.6 Images directe et réciproque d'une partie

Soit $f : E \to F$ une application.

Définition 22 *Si $A \subset E$, l'*image (directe) de A par f *est*

$$\begin{aligned} f\langle A\rangle &= \{y \in F \mid \exists x \in A,\, y = f(x)\} \\ &= \{f(x) \mid x \in A\}. \end{aligned}$$

(ensemble des images par f des éléments de A).

$f\langle E\rangle$ est aussi appelé *image de* f et noté $\mathrm{Im}(f)$. C'est l'ensemble des éléments de F ayant au moins un antécédent dans E par f, de sorte que f est une surjection de E sur F *ssi* $\mathrm{Im}(f) = F$.

Définition 23 *Si $B \subset F$, l'*image réciproque de B par f *est*

$$f^{-1}\langle B\rangle = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

(ensemble des antécédents par f des éléments de B[2]).

3 Lois de composition internes

E est un ensemble.

Définition 24 *Une* loi de composition interne *(l.c.i.) sur E est une application*

$$\gamma : \left\{ \begin{array}{l} E \times E \to E \\ (x,y) \mapsto \gamma(x,y) = x\ \gamma\ y \end{array} \right.$$

Exemple 10
- *l'addition et la multiplication des ensembles de nombres usuels $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$;*
- *$\cup$, $\cap$, $\smallsetminus$ sur $E = \mathcal{P}(X)$;*
- *$\circ$ sur $E = \mathcal{F}(X,X)$.*

Soit γ une l.c.i sur l'ensemble E.

Définition 25
- *γ est* associative *sur E si pour tous x, y, $z \in E$, $x\ \gamma\ (y\ \gamma\ z) = (x\ \gamma\ y)\ \gamma\ z$.*
- *γ est* commutative *sur E si pour tous x, $y \in E$, $x\ \gamma\ y = y\ \gamma\ x$.*

Exemple 11
- *$\cup$, $\cap$ sur $E = \mathcal{P}(X)$ sont commutatives et associatives ;*
- *$\smallsetminus$ sur $E = \mathcal{P}(X)$ n'est ni commutative ni associative si $X \neq \varnothing$;*
- *$\circ$ sur $E = \mathcal{F}(X,X)$ est associative (prop. 2), et non commutative si X comporte au moins trois éléments.*

Définition 26 *l'élément $e \in E$ est* neutre à gauche *(*resp. *à droite) pour γ si pour tout $x \in E$, $e\ \gamma\ x = x$ (*resp. *$x\ \gamma\ e = x$). e est* neutre *pour γ s'il est neutre à gauche et à droite pour γ.*

Lemme 1 *Si e' (*resp. *e'') est neutre à gauche (*resp. *à droite) pour γ, $e' = e''$.*

[2] On fera particulièrement attention à cette notation "$f^{-1}\langle B\rangle$" qui *ne* signifie *pas* que f est bijective.

Corollaire 2 *l'élément neutre d'une l.c.i., s'il existe, est unique.*

Exemple 12 *Le neutre de $\mathcal{F}(X,X)$ pour $\circ$ est Id_X (prop. 3).*

On suppose que la l.c.i. γ admet un neutre e dans E.

Définition 27 *$x \in E$ est* symétrisable à gauche *(*resp. *à droite) pour γ s'il existe $x' \in E$ (*resp. *$x'' \in E$) tel que $x'\ \gamma\ x = e$ (*resp. *$x\ \gamma\ x'' = e$). On dit alors que x' (*resp. *x'') est un* symétrique à gauche *(*resp. *à droite) de x.*
x est symétrisable *pour γ s'il existe $x' \in E$ tel que $x'\ \gamma\ x = x\ \gamma\ x' = e$.*

Proposition 9 *Si γ est associative, et si x admet des symétriques à gauche x' et à droite x'', $x' = x''$.*

Corollaire 3 *Le symétrique d'un élément x symétrisable pour une l.c.i. associative est unique. On le note x^{-1}.*

Exemple 13

1. *Le neutre e d'une l.c.i. γ est toujours symétrisable pour γ (et $e^{-1} = e$).*
2. *Selon la prop. 7, les éléments symétrisables de $\mathcal{F}(X,X)$ pour $\circ$ sont les bijections de X dans X.*

Définition 28 *$x \in E$ est* simplifiable à gauche *(*resp. *à droite) pour γ si pour tous y, $z \in E$ on a $x\ \gamma\ y = x\ \gamma\ z \Rightarrow y = z$ (*resp. *$y\ \gamma\ x = z\ \gamma\ x \Rightarrow y = z$). x est* régulier *(ou* simplifiable*) s'il est simplifiable à gauche et à droite.*

Proposition 10 *Si $x \in E$ est symétrisable à gauche (*resp. *à droite) pour γ, x est simplifiable à gauche (*resp. *à droite) pour γ.*

La réciproque est fausse. En effet, dans $(\mathbb{N}, +)$, tous les éléments sont simplifiables, alors que seul 0 est symétrisable.

4 Relations d'ordre

E est un ensemble.

Définition 29 *Une* relation sur E *est un ensemble de couples d'éléments de E, càd une partie de $E \times E$.*

Notation 4 *Si $\mathcal{R}$ est une relation sur E et si $x, y \in E$ on abrège "$(x,y) \in \mathcal{R}$" en*

$$x\ \mathcal{R}\ y$$

(x est en relation avec y par $\mathcal{R}$).

C'est une notion très répandue :

Exemple 14

1. *La relation d'égalité : $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow x = y$.*
2. *La relation grossière : $\forall x \in E$, $\forall y \in E$, $x\ \mathcal{R}\ y$.*
3. *Les relations de comparaison ($\leq$) sur les ensembles de nombres usuels ;*
4. *La relation de parallélisme des droites dans le plan ou dans l'espace.*

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur l'ensemble E.

Définition 30 *$\mathcal{R}$ est...*
- réflexive *si* $\forall x \in E,\ x \mathcal{R} x$ *;*
- symétrique *si* $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$ *;*
- antisymétrique *si* $\forall x \in E,\ \forall y \in E,$ $(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$ *;*
- transitive *si* $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \forall z \in E,$ $(x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

Définition 31 *$\mathcal{R}$ est une...*
- relation d'équivalence *sur E si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive sur E ;*
- relation d'ordre *sur E si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive sur E.*

Exemple 15 *relations d'équivalence*
les relations 1.[3] *et 4. de l'exemple 14 sont des relations d'équivalence.*

Exemple 16 *relations d'ordre*
voir après la déf. 33.

On étudie dans la suite les propriétés des relations d'ordre.

Notation 5 *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E on note :*
- $x \leq y \ [\mathrm{mod}\, \mathcal{R}]$ *pour* $x \mathcal{R} y$ *;*
- $x < y \ [\mathrm{mod}\, \mathcal{R}]$ *pour* $(x \mathcal{R} y \text{ et } x \neq y)$.

Cette dernière notation décrit la *relation d'ordre strict* associée à $\mathcal{R}$. (Ce n'est pas une relation d'ordre sur E.)

4.1 Ordre total, partiel

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur l'ensemble E. Soient a et b deux éléments de E.

Définition 32 *a et b sont* comparables *par $\mathcal{R}$ si : $a \mathcal{R} b$ ou $b \mathcal{R} a$.*

On peut alors distinguer deux catégories fondamentales de relations d'ordre.

Définition 33 *La relation d'ordre $\mathcal{R}$ est* totale *si tous les éléments de E sont deux à deux comparables par $\mathcal{R}$. Elle est* partielle *si elle n'est pas totale, càd s'il existe au moins deux éléments de E non comparables par $\mathcal{R}$.*

Exemple 17
- *La relation d'ordre usuelle de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (ordre total) ;*
- *La relation d'inclusion sur $E = \mathcal{P}(X)$ (ordre total si $E = \varnothing$ ou un singleton, partiel sinon) ;*
- *La relation $|$ ("divise") sur $\mathbb{N}^*$ (ordre partiel).*

Remarque 3 *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total, la négation de "$x \leq y \ [\mathrm{mod}\, \mathcal{R}]$" est "$y < x \ [\mathrm{mod}\, \mathcal{R}]$", mais si l'ordre $\mathcal{R}$ est partiel, ce n'est pas le cas. En effet, x et y peuvent ne pas être comparables par $\mathcal{R}$.*

[3] La relation d'égalité est aussi une relation d'ordre. C'est la seule relation vérifiant les deux définitions.

4.2 Majorants, minorants

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$ et soient A une partie non vide de E et $m \in E$.

Définition 34
- *m est un* majorant *(*resp. *un* minorant*) de A dans E modulo $\mathcal{R}$ si pour tout $x \in A$, $x \leq m \ [\mathrm{mod}\, \mathcal{R}]$ (*resp. *$m \leq x \ [\mathrm{mod}\, \mathcal{R}]$).*
- *La partie A est dite* majorée *(*resp. minorée*) dans E modulo $\mathcal{R}$ s'il existe un majorant (*resp. *minorant) de A dans E modulo $\mathcal{R}$.*

Exemple 18
- *Dans $\mathbb{R}$ muni de son ordre usuel, $\mathbb{R}_+$ est minorée (par -1, par 0, ...) mais pas majorée.*
- *Dans $\mathbb{N}^*$ muni de la relation $|$ (divise), $A = \{2, 3\}$ est minorée (par 1) et majorée (par 6, 12, ...).*

4.3 Plus grand, plus petit élément

Soit A une partie non vide de l'ensemble ordonné E.

Lemme 2 *S'il existe un élément m de A qui soit aussi un majorant (*resp. *minorant) de A dans E modulo $\mathcal{R}$, m est unique.*

Définition 35 *Le* plus grand *(*resp. plus petit*) élément de A dans E modulo $\mathcal{R}$ est, s'il existe, l'unique élément de A qui soit un majorant (*resp. *minorant) de A.*

Notation 6 *On note $m = \max(A)$ (*resp. $\min(A)$*) le plus grand (*resp. *plus petit) élément de A dans E modulo $\mathcal{R}$.*

Exemple 19
- *Dans $\mathbb{R}$ muni de son ordre usuel,* $\min(\mathbb{R}_+) = 0$.
- *Dans $\mathbb{N}^*$ muni de la relation $|$ (divise), $A = \{2, 3\}$ n'admet ni plus grand, ni plus petit élément.*

4.4 Applications monotones

Soient $(E, \leqslant)$ et $(F, \preccurlyeq)$ deux ensembles ordonnés et f une application de E dans F.

Définition 36 *f est* croissante *(*resp. décroissante, strictement croissante, strictement croissante*) de $(E, \leqslant)$ dans $(F, \preccurlyeq)$ si pour tous x, $x' \in E$,*

$$x \leqslant x' \Rightarrow f(x) \preccurlyeq f(x')$$

*(*resp. *$x \leqslant x' \Rightarrow f(x') \preccurlyeq f(x)$, $x < x' \Rightarrow f(x) \prec f(x')$, $x < x' \Rightarrow f(x') \prec f(x)$).*

Notation 7 *$f \nearrow$ (*resp. *$f \searrow$, $f \uparrow$, $f \downarrow$).*

Définition 37 *f est* monotone *de $(E, \leqslant)$ dans $(F, \preccurlyeq)$ si f est croissante ou décroissante. f est* strictement monotone *si f est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Une composée d'applications monotones est évidemment monotone. En outre :

Proposition 11
1. *Si $f : E \to F$ est monotone et injective, f est strictement monotone.*
2. *Si $f : E \to F$ est strictement monotone, et si l'ordre $\leqslant$ de E est* total*, f est injective.*
3. *Si f est une bijection strictement monotone de E sur F et si l'ordre de E est* total*, f^{-1} est strictement monotone (et de même sens que f).*