PCSI - mathématiques

Suites numériques

1 L'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites de réels

1.1 Définitions et notations

Définition 1 *Une suite de réels est une famille de réels indexée par $\mathbb{N}$, càd une application*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

associant à chaque entier naturel n un réel $u(n)$.

Notation 1 *On remplace la notation traditionnelle des applications (ci-dessus) par celle des familles indexées :*

$$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

ou plus simplement, comme l'ensemble d'indices est toujours $\mathbb{N}$: $u = (u_n)$.

Attention ! Ne pas confondre, spécialement avec cette dernière notation abrégée :

- la suite (u_n) (parenthèses indispensables) ;
- le terme u_{n_0} d'indice n_0 ;
- l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ des termes (image) de la suite.

Notation 2 *On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($= \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$) l'ensemble de toutes les suites de réels.*

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est muni des opérations $+$ et $\times$ définies par

- $(u_n)+(v_n) = (u_n + v_n)$, qui est associative, commutative, qui admet pour neutre la suite $\omega = (\omega_n)$ définie par $\omega_n = 0$ pour tout n ; toute suite (u_n) admet un opposé (la suite $(-u_n)$).
- $(u_n) \times (v_n) = (u_n v_n)$, associative, commutative, distributive par rapport à $+$, admettant pour neutre la suite $\alpha = (\alpha_n)$ définie par $\alpha_n = 1$ pour tout n.

Ces propriétés font de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times\right)$ un anneau commutatif (*cf.* cours d'algèbre).

Attention ! Une suite non nulle (différente de la suite ω) n'est pas nécessairement inversible : p. ex. la suite $(1, 0, 0, ..., 0, 0, ...)$.

Notation 3 *On écrit $(u_n) \leq (v_n)$ pour : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.*

Il s'agit d'une relation d'ordre sur l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Attention, la relation d'ordre strict associée ($(u_n) < (v_n)$) ne signifie pas $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$. Par exemple, $\omega = (0, 0, ..., 0, ...) < (1, 0, 0, ..., 0, 0, ...)$.

1.2 Suites particulières

Suites constantes

Définition 2 *La suite (u_n) est* constante *en $a \in \mathbb{R}$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$.*

Les éléments neutres de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour $+$ et $\times$ sont les suites constantes en 0 et 1 respectivement.

Suites stationnaires

Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$.

Définition 3 *(u_n) est* stationnaire *en a s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N_0 \Rightarrow u_n = a$.*

Dans cette définition, il n'y a pas d'entier N_0 fixé. "N_0" dépend de la suite (u_n) stationnaire considérée. La somme et le produit de deux suites stationnaires sont stationnaires. Les suites constantes sont des suites stationnaires particulières.

Suites majorées, minorées, bornées

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 4 *(u_n) est*

- minorée *(*resp. majorée*) s'il existe $a \in \mathbb{R}$ (*resp. *$b \in \mathbb{R}$) tel que $a \leq u_n$ (*resp. *$u_n \leq b$) pour tout n ;*
- bornée *si (u_n) est majorée et minorée, càd s'il existe a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq u_n \leq b$ pour tout n.*

On déduit de la propriété $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ (*cf.* chapitre précédent) le résultat suivant, pratique pour manipuler la notion de suite bornée :

Lemme 1 *(u_n) est bornée* ssi *$(|u_n|)$ est majorée, càd s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leq M$.*

On vérifie facilement avec ce lemme que les suites stationnaires sont bornées. On en déduit également l'important résultat suivant:

Théorème 1 *Si (u_n) et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont deux suites bornées, il en est de même de $(u_n + v_n)$ et de $(u_n v_n)$.*

On note $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ l'ensemble des suites bornées. D'après le résultat précédent, $\mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ muni des lois $+$ et $\times$ est un anneau (sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; *cf.* cours d'algèbre).

Suites monotones

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (u_n) est

- *croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$;
- *strictement croissante* si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$;
- *décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$;
- *strictement décroissante* si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$;
- *monotone* si (u_n) est croissante ou décroissante ;
- *strictement monotone* si (u_n) est strictement croissante ou strictement décroissante.

Bien sûr, "décroissante" n'est pas la négation de croissante et une suite n'est en général ni croissante ni décroissante. Les suites monotones sont particulièrement favorables lorsqu'il s'agit d'étudier une limite, *cf.* le th. 7.

2 Suites convergentes

2.1 Limite d'une suite

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 5 *La suite (u_n) est* convergente *s'il existe un réel ℓ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \qquad (\mathrm{E}_\ell)$$

On dit que (u_n) *converge vers ℓ.*

Attention, dans cet énoncé, "il n'y a pas" de ε, N, n (variables muettes) ; seulement le réel ℓ et la suite (u_n) (globalement). On commence par s'assurer qu'au plus un réel peut convenir en vertu du

Lemme 2 (unicité de la limite) *Si (u_n) est convergente, il existe un* unique *réel ℓ vérifiant* (E_ℓ).

Ce lemme permet de poser

Définition 6 *ℓ est la* limite *de la suite (u_n) notée*

$$\ell = \lim (u_n)\,.$$

Attention, cette notation n'est pas anodine. Son utilisation suppose d'avoir vérifié au préalable l'énoncé (E_ℓ) relativement complexe. En particulier, la *négation* de "$\lim (u_n) = \ell$" *n'est pas* "$\lim (u_n) \neq \ell$" — la suite (u_n) pourrait bien ne pas être convergente du tout.

Exemple 1

1. *Si (u_n) est stationnaire en ℓ, en particulier si (u_n) est constante en ℓ, (u_n) est convergente vers ℓ.*
2. *Si $u_n = (-1)^n$ pour tout n, (u_n) n'est pas convergente (cf. partie 4).*
3. *Si (u_n) converge vers ℓ et si (u'_n) diffère de (u_n) d'un nombre fini de termes, (u'_n) converge vers ℓ.*

Remarque 1 *On vérifie facilement l'équivalence entre les conditions suivantes :*

1. *(u_n) converge vers ℓ ;*
2. *$(u_n - \ell)$ converge vers 0 ;*
3. *$(|u_n - \ell|)$ converge vers 0.*

Remarque 2 Si (u_n) *converge vers ℓ,* alors $(|u_n|)$ *converge vers $|\ell|$, mais la réciproque est fausse (sauf lorsque $\ell = 0$), cf. exemple 1.2).*

La propriété suivante donne une condition nécessaire *mais non suffisante* (toujours l'exemple 1.2) de convergence :

Proposition 1 Si (u_n) *est convergente,* alors (u_n) *est bornée.*

2.2 Opérations sur les limites

Comment se comportent les suites convergentes vis-à-vis des opérations algébriques ?

Théorème 2 *Soient (u_n), $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ et si (v_n) est convergente vers $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $(u_n + v_n)$ est convergente vers $\ell + \ell'$.*

Le lemme suivant permettra d'en déduire la propriété concernant le produit, mais il peut aussi s'avérer utile par lui-même :

Lemme 3 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Si l'une est bornée et l'autre convergente vers 0, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.*

On en déduit la limite d'un produit :

Théorème 3 *Soient (u_n), $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) est convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ et si (v_n) est convergente vers $\ell' \in \mathbb{R}$ alors $(u_n v_n)$ est convergente vers $\ell\ell'$.*

Le cas de l'inverse est plus délicat. On se rappelle en effet qu'une suite non nulle peut malgré tout s'annuler. Il suffit toutefois que (u_n) cesse de s'annuler à partir d'un certain rang, ce qui est garanti par le résultat suivant :

Lemme 4 *Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ (*resp. $\mathbb{R}_-^*$*), il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_0$ on ait $u_n > \frac{\ell}{2}$ (*resp. $u_n < \frac{\ell}{2}$*).*

On peut maintenant énoncer :

Théorème 4 *Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$,* $\boldsymbol{\ell \neq 0}$. *Alors il existe un rang $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_0 \Rightarrow u_n \neq 0$ et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ (qui est définie à partir du rang N_0) converge vers $\frac{1}{\ell}$.*

Bien sûr, on peut combiner ce résultat avec le th. 3 pour énoncer un théorème sur le quotient.

2.3 Limites et ordre

Envisageons d'abord des suites quelconques (càd, non nécessairement monotones). Le résultat fondamental est le suivant :

Théorème 5 (passage à la limite) *Soit (u_n) une suite convergeant vers le réel ℓ. Si pour tout*[1] *$n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$ alors :*

$$\ell \geq 0.$$

ATTENTION !!! SEULES les inégalités **LARGES** passent à la limite, comme le montre le contre-exemple de la suite $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$.

Corollaire 1 *Soient (u_n), (v_n) deux suites convergeant vers ℓ et ℓ' respectivement. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ alors $\ell \leq \ell'$.*

Preuve On applique le th. 5 à $(v_n - u_n)$. ∎

Le résultat suivant, par contre, n'est pas une conséquence directe du th. 5 :

Théorème 6 (encadrement) *Soient trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si (u_n) et (w_n) sont convergentes vers la* même *limite ℓ, alors : (v_n) converge vers ℓ.*

Passons maintenant à des propriétés spécifiques aux suites monotones. Tout d'abord, contrairement à la situation générale, on peut toujours comparer la position d'une telle suite et celle de sa limite éventuelle :

Proposition 2 *Si (u_n) est croissante (*resp. *décroissante) et convergente vers ℓ, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \ell$ (*resp. *$u_n \geq \ell$).*

Corollaire 2 *Si (u_n) est strictement croissante (*resp. *strictement décroissante) et convergente vers ℓ, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$ (*resp. *$u_n > \ell$).*

Ce dernier résultat est le *seul* cas où l'on peut énoncer une égalité *stricte* portant sur une limite.

Le théorème suivant est d'une importance fondamentale. Il montre que la convergence est beaucoup plus facile à étudier dans le cas des suites monotones. Mais c'est surtout le seul résultat[2] permettant de prouver la convergence d'une suite *sans en connaître la limite.*

Théorème 7 (de la "limite monotone") *Soit (u_n) une suite croissante. Il y a équivalence entre*

1. *(u_n) est convergente et*
2. *(u_n) est majorée dans $\mathbb{R}$, auquel cas*

$$\lim(u_n) = \sup(u_n)$$

avec évidemment un résultat similaire pour les suites décroissantes.

[1]En fait, comme les autres propriétés de cette partie, il suffit que l'inégalité soit vérifiée *à partir d'un certain rang.*

[2]en 1ère année

Suites adjacentes

Il s'agit d'une situation typique d'application du th. 7.

Définition 7 *Deux suites (u_n) et (v_n) sont* adjacentes *si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante (ou vice-versa) et si $(v_n - u_n)$ est convergente vers 0.*

Cette définition a pour conséquence :

Théorème 8 *Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes (avec (u_n) croissante). Alors*

1. *$u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*
2. *(u_n) et (v_n) sont convergentes vers la* même *limite $\ell \in \mathbb{R}$;*
3. *$u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple 2 *Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ (avec $v_0 = 4$). Alors les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, leur limite commune étant notée e.*

On trouve parfois le th. 8 sous la forme topologique équivalente :

Théorème 9 (des segments emboîtés) *Si (I_n) est une suite décroissante* (mod $\subset$) *de segments telle que* $\lim(\operatorname{diam}(I_n)) = 0$, *alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton.*

3 Limites infinies

On a construit $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Définition 8 *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (u_n)* admet pour limite $+\infty$ *si :*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n > A$$

et que (u_n) admet pour limite $-\infty$ *si $(-u_n)$ admet pour limite $+\infty$, ce qu'on peut encore écrire*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n < A$$

Attention ! De telles suites ne sont pas bornées, donc *pas convergentes.* À ce titre on ne peut pas leur appliquer les propriétés de la partie 2. Malgré tout, on continue de noter $\lim(u_n) = +\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 3 *Si $u_n = n$ pour tout n,* $\lim(u_n) = +\infty$.

3.1 Opérations sur les limites infinies

Les propriétés opératoires des limites infinies ne posent pas de problème, à moins de rencontrer une *forme indéterminée.* Dans un tel cas, on ne peut énoncer de conclusion générale et une étude particulière est nécessaire. On résume les résultats dans des tableaux :

somme :

		$\lim(u_n)$		
		$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lim(v_n)$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	([3])
	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
	$+\infty$	([3])	$+\infty$	$+\infty$

[3]forme indéterminée "$\infty - \infty$"

produit :

		$-\infty$	$\ell < 0$	0	$\ell > 0$	$+\infty$
		$\lim(u_n)$				
$\lim(v_n)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	(4)	$-\infty$	$-\infty$
	$\ell' < 0$	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
	0	(4)	0	0	0	(4)
	$\ell' > 0$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	(4)	$+\infty$	$+\infty$

inverse :

$\lim(u_n)$	$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	0	$+\infty$
$\lim\left(\frac{1}{u_n}\right)$	0	$\frac{1}{\ell}$	(5)	0

On peut combiner produit et inverse en un tableau de résultats pour la quotient, qui fera apparaître les formes indéterminées "$\frac{0}{0}$" et "$\frac{\infty}{\infty}$".

3.2 Limites infinies et ordre

Dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut énoncer commodément le th. 7 sous la forme suivante :

Théorème 10 *Soit (u_n) une suite croissante. Alors (u_n) admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$:*

- *un réel ℓ si (u_n) est majorée ;*
- *$+\infty$ si (u_n) n'est pas majorée.*

4 Sous-suites

Soit (u_n) une suite de réels.

Définition 9 *Une* sous-suite *de (u_n) est une suite (v_n) de la forme*

$$v_n = u_{\varphi(n)}$$

où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple 4 (u_n), (u_{n+1}), (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{n^2}), ...

Le lemme suivant aidera à préciser les conséquences de cette définition :

Lemme 5 *Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.*

Preuve Par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. ■

On en déduit la propriété fondamentale des sous-suites :

Proposition 3 *Si (u_n) est convergente vers ℓ, alors* toute *sous-suite de (u_n) est convergente* vers *ℓ.*

On peut contraposer ce résultat pour prouver la divergence d'une suite : il suffit d'exhiber deux sous-suites convergeant vers des limites différentes, *cf.* exemple 1.2.

Notons l'importance particulière des sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) en vertu de

Proposition 4 *Soit (u_n) une suite telle que les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la* même *limite ℓ. Alors (u_n) est convergente vers ℓ.*

[4] forme indéterminée "$0 \times \infty$"

[5] Ici, on ne peut pas conclure à moins de connaître le *signe* de u_n.

5 Relations de comparaison

5.1 Relation de domination

Soient (u_n), $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 10 (u_n) *est* dominée *par (v_n) s'il existe une suite bornée (β_n) et un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N$ on ait*

$$(u_n) = (\beta_n v_n).$$

Notation 4 *On écrit $(u_n) = O(v_n)$.*

Si (v_n) ne s'annule pas, (u_n) est dominée par (v_n) *ssi* la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.

Exemple 5

- $(3n^4 + 1) = O(n^4)$ *;* $(3n^4 + 1) = O(n^5)$ *;*
- $(3n^4 + 1)$ *n'est pas dominé par* n^3 *;*
- $(u_n) = O(0) \Leftrightarrow (u_n)$ *est stationnaire en* 0 *;*
- $(u_n) = O(1) \Leftrightarrow (u_n)$ *est bornée.*

Propriétés de la relation "O"

Pour toutes suites (u_n), (v_n), (w_n), $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on a les relations suivantes :

1. $(u_n) = O(u_n)$;
2. $((u_n) = O(v_n)$ et $(v_n) = O(w_n)) \Rightarrow (u_n) = O(w_n)$;
3. $((u_n) = O(w_n)$ et $(v_n) = O(x_n)) \Rightarrow$ $(u_n v_n) = O(w_n x_n)$.

Attention ! On ne peut cependant pas *ajouter* des relations "O".

5.2 Relation de prépondérance

Soient (u_n), $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 11 (u_n) *est* négligeable *devant (v_n) (ou : (v_n) est* prépondérante *sur (u_n)) s'il existe une suite (ε_n) convergeant vers 0 et un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$ on ait*

$$(u_n) = (\varepsilon_n v_n).$$

Notation 5 *On écrit $(u_n) = o(v_n)$.*

Si (v_n) ne s'annule pas, (u_n) est négligeable devant (v_n) *ssi* la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente vers 0.

Exemple 6

- $(3n^4 + 1) = o(n^5)$ *;*
- $(3n^4 + 1)$ *n'est pas négligeable devant* n^4 *;*
- $(u_n) = o(0) \Leftrightarrow (u_n)$ *est stationnaire en* 0 *;*
- $(u_n) = o(1) \Leftrightarrow (u_n)$ *converge vers* 0 *;*
- $(u_n) = o(u_n) \Leftrightarrow (u_n)$ *est stationnaire en* 0.

Propriétés de la relation "o"

Pour toutes suites (u_n), (v_n), (w_n), $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ on a les relations suivantes :

1. $(u_n) = o(v_n) \Rightarrow (u_n) = O(v_n)$;
2. $((u_n) = o(v_n)$ et $(v_n) = O(w_n)) \Rightarrow (u_n) = o(w_n)$;
3. $((u_n) = o(w_n)$ et $(v_n) = O(x_n)) \Rightarrow$
   $(u_n v_n) = o(w_n x_n)$.

Mais **attention !** On ne peut pas *ajouter* des relations de négligeabilité.

5.3 Équivalence des suites

Soient (u_n), $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 12 (u_n) *est* équivalente *à* (v_n) *si*

$$(u_n - v_n) = o(v_n).$$

Notation 6 $(u_n) \sim (v_n)$.

La définition 12 signifie qu'il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que pour n assez grand on ait $u_n - v_n = \varepsilon_n v_n$ soit

$$u_n = (1 + \varepsilon_n) v_n.$$

Si (v_n) en s'annule pas, cela revient à dire que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ admet pour limite 1.

Propriétés de la relation "$\sim$"

Proposition 5 *La relation "$\sim$" est une* relation d'équivalence *sur l'ensemble* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *des suites de réels.*

En particulier, la relation "$\sim$" est symétrique, et l'on pourra dire "(u_n) et (v_n) sont équivalentes" (sans préciser l'ordre).

On a en outre, quelles que soient les suites (u_n), (v_n), (w_n), $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

1. $((u_n) \sim (w_n)$ et $(v_n) \sim (x_n)) \Rightarrow (u_n v_n) \sim (w_n x_n)$;
   (Mais **ATTENTION !!!** On ne peut pas **AJOUTER DES EQUIVALENTS !**)
2. Si $(u_n) \sim (v_n)$ et si pour n assez grand, $u_n \neq 0$, il en est de même de (v_n) et : $\left(\frac{1}{u_n}\right) \sim \left(\frac{1}{v_n}\right)$;
3. Si $(u_n) \sim (v_n)$, pour n assez grand, u_n et v_n ont le même signe ;
4. (fondamental) Si $(u_n) \sim (v_n)$ et si (u_n) converge vers ℓ, il en est de même de (v_n).

Cette dernière propriété fait de la relation "$\sim$" un outil de choix pour l'étude des limites. L'idée est de remplacer la suite (u_n) étudiée par d'autres suites, plus simples, équivalentes à (u_n), jusqu'à ce que la limite apparaisse. Pour cela, il faudrait disposer d'un ensemble de relations d'équivalence "de base". On s'appuie sur la propriété suivante, qui sera détaillée plus loin dans le cours d'analyse :

Proposition 6 *Si f est définie au voisinage de a, dérivable en a et si* $\boldsymbol{f'(a) \neq 0}$, *alors pour toute suite (u_n) convergeant vers 0 on a :*

$$f(a + u_n) - f(a) \sim f'(a) u_n$$

En appliquant ce résultat aux fonctions usuelles on obtient les équivalents classiques suivants (avec $\lim(u_n) = 0$) :

1. $(\mathrm{e}^{u_n} - 1) \sim (u_n)$;
2. $(\ln(1 + u_n)) \sim (u_n)$;
3. $((1 + u_n)^{\alpha} - 1) \sim (\alpha u_n)$;
4. $(\sin u_n) \sim (u_n)$;
5. $(\tan u_n) \sim (u_n)$;
6. $(\operatorname{sh} u_n) \sim (u_n)$;
7. $(\operatorname{th} u_n) \sim (u_n)$; etc.

Ces résultats peuvent être combinés avec les propriétés opératoires de l'équivalence pour résoudre la plupart des formes indéterminées.

Exemple 7 *Calculer la limite de*

$$\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\left(\sin\frac{1}{n}\right)^2}$$

5.4 Suites de référence

Suites géométriques

Soit $a \in \mathbb{R}$. La *suite géométrique* de raison a est la suite (u_n) définie par $u_n = a^n$ pour tout n.

Théorème 11 *Soit $a \in \mathbb{R}$*

1. *si $a > 1$, (a^n) admet pour limite $+\infty$;*
2. *si $a = 1$, (a^n) est constante en 1 ;*
3. *si $|a| < 1$, (a^n) admet pour limite 0 ;*
4. *si $a \leq -1$, (a^n) n'admet pas de limite (finie ou infinie).*

Il est également très important de savoir sommer les termes d'une suite géométrique :

Théorème 12 *Soit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$.*

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + ... + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Hiérarchie des suites

Il s'agit de classer un certain nombre de suites de référence par rapport à la relation "o". On utilisera éventuellement le résultat suivant :

Lemme 6 ("comparaison logarithmique") *Soient deux suites (u_n) et (v_n) de réels non nuls telles qu'à partir d'un certain rang on ait :* $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|$. *Alors :*

$$(u_n) = O(v_n).$$

Les propriétés suivantes résolvent une fois pour toutes un certain nombre de formes indéterminées classiques :

Proposition 7

$$(n!) = o(n^n).$$

Proposition 8 *Pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$(a^n) = o(n!).$$

Proposition 9 *Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$,*

$$(n^\alpha) = o(a^n).$$

Proposition 10 *Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$,*

$$\left((\ln n)^\beta\right) = o(n^\alpha).$$

6 Suites complexes

On définit une suite de complexes à l'aide de deux suites de réels, ses parties réelle et imaginaire. Si $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ on écrira pour tout n

$$u_n = x_n + \mathrm{i}y_n,$$

définissant ainsi deux suites de réels (x_n) et (y_n) notées $\mathrm{Re}(u_n)$ et $\mathrm{Im}(u_n)$.

On définit également

- la suite $\overline{(u_n)} = (\bar{u}_n) = (x_n - \mathrm{i}y_n)$ conjuguée de (u_n),
- la suite $|(u_n)| = (|u_n|) = \left(\sqrt{x_n^2 + y_n^2}\right)$ des modules (qui appartient à $\mathbb{R}^\mathbb{N}$).

Parmi les définitions et les propriétés vues jusqu'ici, seules celles qui ne font pas appel à la relation d'ordre peuvent se généraliser aux suites complexes. Toutefois, on peut étendre les énoncé contenant la valeur absolue, à condition de remplacer celle-ci par le module.

Par exemple, s'il est impossible de parler de "suite complexe monotone", on peut malgré tout reprendre la notion de suite bornée provenant du lemme 1.

6.1 Suites bornées

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$.

Définition 13 (u_n) *est* bornée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n| \leq M$.*

Cette notion peut être caractérisée à l'aide des parties réelle et imaginaire :

Proposition 11 *La suite $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ est bornée* ssi $\mathrm{Re}(u_n)$ *et* $\mathrm{Im}(u_n)$ *le sont.*

6.2 Suites convergentes

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$.

Définition 14 (u_n) *est* convergente *s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Cet énoncé est formellement identique à la définition 5, mais la notation $|\cdot|$ signifie ici le module.

Par un argument identique à celui utilisé dans $\mathbb{R}$, on prouve l'unicité de la limite : seul *un* complexe ℓ peut vérifier l'énoncé ci-dessus, et on note

$$\ell = \lim(u_n).$$

Comme pour la notion de suite bornée, on peut caractériser cette définition à l'aide des parties réelle et imaginaire :

Proposition 12 *Soient $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Notons $u_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ pour tout n et $\ell = a + \mathrm{i}b$. Il y a équivalence entre*

1. *(u_n) converge vers ℓ (dans $\mathbb{C}^\mathbb{N}$) et*
2. *(x_n) converge vers a et (y_n) converge vers b (dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$).*

Ce résultat nous permet de déduire les propriétés opératoires des suites complexes convergentes. On peut reconduire à l'identique les propriétés *algébriques* (càd, ne faisant pas intervenir la relation d'ordre) de la partie 2.2.

D'autre part, si l'on peut *en principe* étudier toute suite de complexes en se ramenant à deux suites de réels (ses parties réelle et imaginaire), cela ne veut pas dire qu'il est toujours pertinent de procéder ainsi.

Mentionnons un dernier résultat pour les situations où le calcul sous forme trigonométrique est plus pratique :

Proposition 13 *Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = r_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$ (forme trigonométrique du complexe u_n).* Si *(r_n) admet une limite r et* si *(θ_n) admet une limite θ,* alors *: (u_n) converge vers $r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.*

Malheureusement, contrairement à la prop. 12, la réciproque est fausse, comme on le voit en prenant simplement $r_n = 1$ et $\theta_n = 2n\pi$. Pour utiliser à bon escient la propriété 13, il est nécessaire de choisir avec discernement un argument θ_n du complexe u_n.

Par exemple :

Exercice 1

Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$