PCSI - mathématiques

Calcul de primitives

1 Théorèmes de calcul

1.1 Notation

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est continue sur I on note

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x$$

une primitive de f sur I.

Si $F = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ et si $a \in I$ on désigne par

$$F(a) = \int f(x)\, \mathrm{d}x\Big|_{x=a}$$

la valeur de F en a.

1.2 Formules d'I.P.P.

Théorème 1 *Si u, $v : I \to \mathbb{K}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur I,*

$$\int u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = uv - \int u'(x) v(x)\, \mathrm{d}x$$

Théorème 2 *Si u, $v : I \to \mathbb{K}$ sont $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I,*

$$\int u(x)\, v^{(n+1)}(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i u^{(i)} v^{(n-i)} - (-1)^n \int u^{(n+1)}(x) v(x)\, \mathrm{d}x$$

1.3 Formules de changement de variable

Théorème 3 *I, J intervalles de $\mathbb{R}$. $f : J \to \mathbb{K}$ continue, $\varphi : I \to J$ $\mathcal{C}^1$:*

$$\int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = \int f(x)\, \mathrm{d}x\Big|_{x=\varphi(t)}$$

Théorème 4 *I, J intervalles de $\mathbb{R}$. $f : J \to \mathbb{K}$ continue, $\varphi : I \to J$ $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme :*

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

2 Primitives "usuelles"

Table 1 puissances et exponentielles

$a \in$	$n \in$	$f(x)$	$\int f(x)\ \mathrm{d}x$	sur
$\mathbb{C}$	$\mathbb{N}$	$(x-a)^n$	$\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{C}$	$\mathbb{N} - \{0,1\}$	$\frac{1}{(x-a)^n}$	$\frac{1}{1-n}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad a \in \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \mathbb{R} - \{a\} & \text{si} \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$
$\mathbb{R}$		$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert$	$\mathbb{R} - \{a\}$
$\mathbb{C} - \mathbb{R}$		$\frac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert + \mathrm{i}\arctan\frac{x-\Re(a)}{\Im(a)}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{C} - \{-1\}$		$x^a\ (= \exp(a \ln x))$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\mathbb{C}^*$		e^{ax}	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$	$\mathbb{R}$

Table 2 fonctions trigonométriques de base

$f(x)$	$\int f(x)\ \mathrm{d}x$	sur
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1,1[$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsh} x$ $(= \ln(x + \sqrt{1+x^2}))$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2-1}\rvert$	$]-\infty,-1[$, $]1,+\infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$

Table 3 généralisations ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$)

$f(x)$	$\int f(x)\ \mathrm{d}x$	sur
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\frac{x}{a}$	$]-a,a[$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\operatorname{argsh}\frac{x}{a}$ (ou $\ln(x + \sqrt{a^2+x^2})$)	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\rvert$	$]-\infty,-a[$, $]a,+\infty[$
$\frac{1}{a^2-x^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$	$]-\infty,-a[$, $]-a,a[$, $]a,+\infty[$

Table 4 autres fonctions trigonométriques

$f(x)$	$\int f(x)\ \mathrm{d}x$	sur
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$I_k = \ ]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}[$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x$	$J_k = \ ]k\pi, (k+1)\pi[$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	I_k
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	J_k
$\tan^2 x$	$\tan x - x$	I_k
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$-\coth x$	$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\coth x$	$\ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert$	$\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$

Rappel $u : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas sur I : $\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$ sur I

3 Fonctions rationnelles

3.1 sur $\mathbb{C}$

Après décomposition en éléments simples on a à calculer des primitives telles que

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^n} = ...$$

- si $n \geq 2$: $\frac{1}{1-n} \frac{1}{(t-a)^{n-1}}$
- si $n = 1$: $\begin{cases} \ln|t-a| & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ \ln|t-a| + \mathrm{i} \arctan\left(\frac{x - \Re(a)}{\Im(a)}\right) & \text{si } a \notin \mathbb{R} \end{cases}$

3.2 sur $\mathbb{R}$

- On peut calculer une primitive sur $\mathbb{C}$ puis regrouper les termes deux à deux conjugués ;
- Ou, après décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$, on a à calculer des primitives telles que :
  - $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^n} = ...$ (idem $\mathbb{C}$).
  - $\int \frac{\alpha t + \beta}{(t^2 - 2at + b)^n} \mathrm{d}t$ avec $\delta = a^2 - b < 0$.

1. *On écrit* $\alpha t + \beta = \frac{\alpha}{2}(2t - 2a) + \beta + \alpha a$ d'où

$$\int \frac{\alpha t + \beta}{(t^2 - 2at + b)^n} \mathrm{d}t = \frac{\alpha}{2} \int \frac{(2t - 2a)}{(t^2 - 2at + b)^n} \mathrm{d}t + (\beta + \alpha a) \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 - 2at + b)^n}$$

et

$$\int \frac{(2t - 2a)}{(t^2 - 2at + b)^n} \mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{1-n} \frac{1}{(t^2 - 2at + b)^{n-1}} & \text{si } n \geq 2 \\ \ln\left|t^2 - 2at + b\right| & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

2. *Passage à la forme canonique* :
A calculer $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 - 2at + b)^n}$, $n \geq 1$, $a^2 - b < 0$.

On écrit (en posant $\delta = \sqrt{b - a^2} > 0$)

$$\begin{aligned} t^2 - 2at + b &= (t-a)^2 + b - a^2 = (t-a)^2 + \delta^2 \\ &= \delta^2 \left(1 + \left(\frac{t-a}{\delta}\right)^2\right) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 - 2at + b)^n} &= \frac{1}{\delta^{2n}} \int \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 + \left(\frac{t-a}{\delta}\right)^2\right)^n} \\ &= \frac{1}{\delta^{2n-1}} \int \frac{\frac{1}{\delta} \mathrm{d}t}{\left(1 + \left(\frac{t-a}{\delta}\right)^2\right)^n} \\ &= \frac{1}{\delta^{2n-1}} \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n} \bigg|_{x = \frac{t-a}{\delta}} \end{aligned}$$

Exemple 1

1. $\frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 5}$
2. $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + t + 1)^2}$

La méthode générale nécessite enfin le

3. *Calcul de* $J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n}$

méthode 1 algébrique (IPP)

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n} &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} - \int \frac{-2nx^2}{(1 + x^2)^{n+1}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \int \frac{(1 + x^2) - 1}{(1 + x^2)^{n+1}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2n \left(J_n - J_{n+1}\right) \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$2n\, J_{n+1} = \frac{x}{(1 + x^2)^n} + (2n - 1)\ J_n$$

qui avec $J_1(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)} = \arctan x$ permet un calcul de proche en proche.

méthode 2 trigonométrique (C.V. $x = \tan t$)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(1 + x^2)^n} \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\cos^{-2n} t} \frac{1}{\cos^2 t} \mathrm{d}t \bigg|_{t = \arctan x} \\ &= \int \cos^{2n-2} t \, \mathrm{d}t \bigg|_{t = \arctan x} \end{aligned}$$

puis IPP ou linéarisation.

Exemple 2

1. $\int \frac{\mathrm{d}t}{1 - t^2}$
2. $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3 - 1}$

4 Fonctions rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$

A calculer $\int R(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x$ où $R \in \mathbb{R}(X, Y)$

4.1 Méthode générale

Changement de variable

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

d'où

$$x = 2 \arctan t,\ \mathrm{d}x = \frac{2}{1 + t^2} \mathrm{d}t,$$
$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

et

$$\int R(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2}{1 + t^2} \mathrm{d}t \bigg|_{t = \tan \frac{x}{2}} :$$

fonction *rationnelle* de t.

Exemple 3

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$

4.2 Cas particuliers

Remarque 1

$$\left.\begin{array}{l}\cos \text{ est invariante par } x \curvearrowright -x \\ \sin \text{ est invariante par } x \curvearrowright \pi - x \\ \tan \text{ est invariante par } x \curvearrowright x+\pi\end{array}\right\} \text{ mais } \mathrm{d}x \curvearrowright -\mathrm{d}x$$

Ceci aide à mémoriser la

Règle de Bioche Si l'*élément différentiel*

$$R(\sin x, \cos x)\ \mathrm{d}x$$

est invariant par $x \curvearrowright -x$ (*resp.* $x \curvearrowright \pi - x$, $x \curvearrowright x+\pi$) on fait le changement de variable $t = \cos x$ (*resp.* $t = \sin x$, $t = \tan x$).

On fait ensuite systématiquement apparaître le $\mathrm{d}t = -\sin x\,\mathrm{d}x$ (*resp.* $\cos x\,\mathrm{d}x$, $\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$)

Exemple 4

1. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{1}{\sin^2 x+3\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^3 x}$

5 Fonctions rationnelles en $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et e^x

A calculer $\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \mathrm{e}^x)\ \mathrm{d}x$ où $R \in \mathbb{R}(X,Y,Z)$

On effectue le changement de variable

$$t = \mathrm{e}^x$$

d'où

$$x = \ln t,\ \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\mathrm{d}t,\ \operatorname{sh} x = \frac{t^2-1}{2t},\ \operatorname{ch} x = \frac{t^2+1}{2t}$$

et

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \mathrm{e}^x)\ \mathrm{d}x = \int R\left(\frac{t^2-1}{2t}, \frac{t^2+1}{2t}, t\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\mathrm{e}^x}$$

fonction rationnelle de t.

Exemple 5

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x}$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$
3. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^3 x+\operatorname{sh}^3 x-1}$

Remarque 2 *On peut aussi poser* $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ *d'où* $x = 2\operatorname{argth} t$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$, $\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$.

Remarque 3 (règle de Bioche hyperbolique) *Dans l'expression* $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \mathrm{e}^x)$ *on remplace* $\operatorname{sh} x$ *par* $\sin x$ *(*resp. $\operatorname{ch} x$ *par* $\cos x$*). Si la règle de Bioche permet alors le changement de variable* $t = \cos x$ *(*resp. $t = \sin x$, $t = \tan x$*) on effectue dans* $R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \mathrm{e}^x)$ *le changement de variable* $t = \operatorname{ch} x$ *(*resp. $t = \operatorname{sh} x$, $t = \operatorname{th} x$*) puis on force l'apparition du* $\mathrm{d}t$.

6 Fonctions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

A calculer $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ où $R \in \mathbb{R}(X,Y)$, $n \geq 2$, $ad - bc \neq 0$.

On effectue le changement de variable

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

d'où

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d} \text{ puis } x = \frac{b-dt^n}{ct^n-a} = H(t),\ \mathrm{d}x = H'(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x = \int R(H(t), t)\ H'(t)\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}} :$$

fonction rationnelle de t.

Exemple 6

1. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x$
2. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

7 Fonctions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

A calculer $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$ où $R \in \mathbb{R}(X,Y)$.

On effectue le passage à le forme canonique dans le trinôme ax^2+bx+c

Cas 1 $a < 0$, $b^2 - 4ac > 0$

$$ax^2+bx+c = -a\left(q^2-(x-p)^2\right)\ (q>0)\ ;$$

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{-a}\sqrt{q^2-(x-p)^2} \\ &= q\sqrt{-a}\sqrt{1-\left(\frac{x-p}{q}\right)^2}\end{aligned}$$

est défini sur $[p-q, p+q]$ d'où le changement de variable

$$\frac{x-p}{q} = \sin t$$

donc

$$x = p + q\sin t,\ t = \arcsin\frac{x-p}{q},\ \mathrm{d}x = q\cos t\,\mathrm{d}t,$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = q\sqrt{-a}\cos t$$

et :

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) = \int R\left(p+q\sin t, q\sqrt{-a}\cos t\right)\ q\cos t\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\arcsin\frac{x-p}{q}} :$$

fonction rationnelle en $\sin t$ et $\cos t$.

Exemple 7 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(-2x^2+x+1)^{3/2}}$

Cas 2 $a > 0,\ b^2 - 4ac < 0$

$$ax^2+bx+c = a\left((x-p)^2 + q^2\right)\ (q > 0)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a}\sqrt{(x-p)^2+q^2}\\ &= q\sqrt{a}\sqrt{1+\left(\frac{x-p}{q}\right)^2}\end{aligned}$$

(défini sur $\mathbb{R}$) d'où le changement de variable

$$\frac{x-p}{q} = \operatorname{sh} t$$

donc

$$x = p + q\operatorname{sh} t,\ t = \operatorname{argsh}\frac{x-p}{q},\ \mathrm{d}x = q\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t,$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = q\sqrt{a}\operatorname{ch} t$$

et :

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) = \int R\left(p+q\operatorname{sh} t, q\sqrt{a}\operatorname{ch} t\right)\ q\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\operatorname{argsh}\frac{x-p}{q}} :$$

fonction rationnelle en $\operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch} t$.

Cas 3 $a > 0,\ b^2 - 4ac > 0$

$$ax^2+bx+c = a\left((x-p)^2 - q^2\right)\ (q > 0)$$

$\sqrt{ax^2+bx+c}$ est définie sur $I =]-\infty, \alpha]$ et $J = [\beta, +\infty[$ ($\alpha = p - q$, $\beta = p + q$)

(a) sur $I =]-\infty, p-q]$, $x \leq p - q$ donc $x - p \leq -q$ donc $\frac{x-p}{q} \leq 1$ d'où
$$\frac{x-p}{q} = -\operatorname{ch} t$$
et
$$x = p - q\operatorname{ch} t,\ \mathrm{d}x = -q\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t,$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = q\sqrt{a}\operatorname{sh} t,\ t = \operatorname{argch}\frac{p-x}{q}.$$

(b) sur $J = [p+q, +\infty[$, $x \geq p + q$ donc $\frac{x-p}{q} \geq 1$ d'où
$$\frac{x-p}{q} = \operatorname{ch} t$$
et
$$x = p + q\operatorname{ch} t,\ \mathrm{d}x = q\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t \text{ et}$$
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = q\sqrt{a}\operatorname{sh} t \text{ avec } t = \operatorname{argch}\frac{x-p}{q}.$$

Dans les deux cas on se ramène à une fonction rationnelle en $\operatorname{sh} t$ et $\operatorname{ch} t$.

Remarque 4 *On saurait le cas échéant exprimer* argsh, argch *à l'aide des fonctions usuelles. C'est en fait inutile puisque pour intégrer la fonction rationnelle en* $\operatorname{sh} t$ *et* $\operatorname{ch} t$ *obtenue, le changement de variable qu'on effectue ensuite est* $u = \mathrm{e}^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t$ *qu'on sait donc exprimer dans tous les cas en fonction de la variable originale* x.

8 Problèmes insolubles

Voici quelques exemples de fonctions qu'il ne faudra pas chercher à primitiver. En effet, on démontre qu'il est impossible d'expliciter une telle primitive à l'aide des fonctions usuelles.

- $\int \mathrm{e}^{\pm t^2}\ \mathrm{d}t$,
- $\int \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$,
- $\int \frac{t}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$,
- $\int \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$,
- $\int \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$,
- $\int \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$,
- $\int \ln(\ln t)\ \mathrm{d}t$,
- $\int \sin\left(t^2\right)\ \mathrm{d}t$,
- $\int \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t$,
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t\ (ab \neq 0)$.

Cependant on connaît exactement certaines intégrales de ces fonctions ; ainsi les "intégrales généralisées"

- $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,
- $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$,
- $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.