PCSI - mathématiques

Opérateurs différentiels

1 Champs de vecteurs

Ω est un ouvert de l'espace affine $\mathbb{R}^n$.

Définition 1 *Un* champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$ *sur* Ω *est une application* $\vec{V}$ *de classe* $\mathcal{C}^k$ *de* Ω *dans le* $\mathbb{R}$*-ev* $\mathbb{R}^n$.

C'est donc "une application qui à tout point M de Ω associe un vecteur $\vec{V}(M)$ de $\mathbb{R}^n$", et ceci de façon $\mathcal{C}^k$.

On note $\vec{V}(M) = \sum_{i=1}^n P_i(M)\vec{e}_i = P_1(M)\ \vec{e}_1 + ... + P_n(M)\vec{e}_n$ si $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$; ou plus simplement $\vec{V} = \sum_{i=1}^n P_i\vec{e}_i$, les fonctions P_1, ..., P_n étant de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}$.

En dimension $n = 2$ ou 3 ces notations deviennent respectivement $\vec{V} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath}$ et $\vec{V} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$.

2 Divergence

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Si $M \in \Omega$, puisque $\vec{V}$ est $\mathcal{C}^1$ au voisinage de M, $\vec{V}$ admet une *différentielle* en M, soit $\mathrm{d}\vec{V}(M)$, qui est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, autrement dit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Définition 2 *La* divergence *de* $\vec{V}$ *en* M *est la trace de l'endomorphisme* $\mathrm{d}\vec{V}(M)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *:*

$$\operatorname{div}\vec{V}(M) = \operatorname{tr}\left(\mathrm{d}\vec{V}(M)\right)$$

L'intérêt de cette définition est de montrer que $\operatorname{div}\vec{V}(M)$ dépend de façon intrinsèque du champ de vecteurs $\vec{V}$ et du point M (et ne dépend donc pas du choix d'une base de $\mathbb{R}^n$, p. ex.).

Calcul

On se place dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que si $\vec{h} = h^1\vec{e}_1 + ... + h^n\vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$, la valeur en $\vec{h}$ de la différentielle $\mathrm{d}\vec{V}(M)$ de $\vec{V}$ en M est définie par :

$$\mathrm{d}\vec{V}(M) \bullet \vec{h} = \sum_{i=1}^n h^i \frac{\partial\vec{V}}{\partial x_i}(M)$$

Par suite, les vecteurs-colonne de $\operatorname{mat}\left(\mathrm{d}\vec{V}(M)\ ;\mathcal{E}\right)$ sont : $\mathrm{d}\vec{V}(M) \bullet \vec{e}_i = \frac{\partial\vec{V}}{\partial x_i}(M)$ pour $i = 1$, ..., n et le coefficient d'indice (i,i) de cette matrice vaut : $\vec{e}^{*i}\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial x_i}(M)\right) = \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(M)$. Par conséquent :

$$\operatorname{div}\vec{V}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial x_i}(M).$$

En dimension 2 : $\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$.

En dimension 3 : $\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$.

On voit enfin sur ces expressions que si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω, $\operatorname{div}\vec{V}$ est une application de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ de Ω dans $\mathbb{R}$.

3 Champs de gradients

3.1 Rappel

"Toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est le produit scalaire avec un unique vecteur", càd si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, il existe un unique vecteur $\vec{a}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\varphi\left(\vec{h}\right) = (\vec{a} \mid \vec{h})$ pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Si $M \in \Omega$, f est $\mathcal{C}^1$ au voisinage de M et admet donc une différentielle en M. $\mathrm{d}f(M)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (puisque f arrive dans $\mathbb{R}$), donc une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$. Le rappel précédent montre qu'il existe un unique vecteur $\vec{g}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que : $\mathrm{d}f(M) \bullet \vec{h} = (\vec{g} \mid \vec{h})$ pour tout $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$.

Définition 3 $\vec{g}$ *est le* gradient de f en M *noté* $\overrightarrow{\operatorname{grad}}f(M)$.

Il est donc *caractérisé* par :

$$\mathrm{d}f(M) \bullet \vec{h} = (\overrightarrow{\operatorname{grad}}f(M) \mid \vec{h})$$

pour tout $\vec{h} \in R^n$.

Cette définition montre le caractère *intrinsèque* (indépendant de toute base) de la définition du gradient.

3.2 Calcul

dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$: comme précédemment, la valeur en $\vec{h} = h^1\vec{e}_1 + ... + h^n\vec{e}_n$ de la différentielle de f en M est $\mathrm{d}f(M) \bullet \vec{h} = \sum_{i=1}^n h^i \frac{\partial f}{\partial x_i}(M)$. On reconnaît dans cette expression le produit scalaire du vecteur $\vec{h}$ avec $\vec{g} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(M)\vec{e}_i$ qui est donc le gradient de f en M :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}f(M) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(M), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(M)\right)$$

En dimension 2 : $\overrightarrow{\operatorname{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath}$.

En dimension 3 : $\overrightarrow{\operatorname{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$.

On en déduit que si l'application f est de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}$, le champ de vecteurs $\overrightarrow{\operatorname{grad}}f$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur l'ouvert Ω.

3.3 Potentiel scalaire

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert Ω.

Définition 4 *On dit que $\vec{V}$* dérive d'un potentiel scalaire *s'il existe une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, alors appelée* un potentiel scalaire *de $\vec{V}$, telle que*

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f.$$

Notant comme précédemment $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} P_i \vec{e}_i$ dans la base canonique, et comme $\overrightarrow{\text{grad}} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i$ on voit que $\vec{V}$ dérive du potentiel scalaire f *ssi*

$$P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{1}$$

pour $1 \leq i \leq n$. En outre, f est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

Supposons que $\vec{V}$ soit au moins $\mathcal{C}^1$: $k \geq 1$. Alors f est au moins $\mathcal{C}^2$ donc pour i, $j \in [\![1, n]\!]$ on peut appliquer le théorème de Schwarz à f : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ en tout point M de Ω. Compte tenu des conditions (1) cela donne :

Proposition 1 Si $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} P_i \vec{e}_i$ *dérive d'un potentiel scalaire* alors *pour tous i, $j \in [\![1, n]\!]$:*

$$\frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}.$$

Ces équations sont appelée *équations de fermeture*, elles expriment une condition *nécessaire* pour que le champ $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire. Il est évidemment inutile d'envisager les cas où $i = j$.

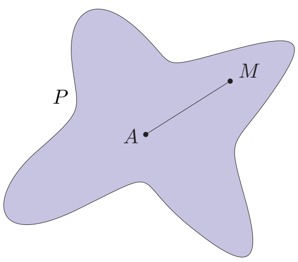
En dimension 2 il n'y en a qu'une : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

En dimension 3 il y en a trois : $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$. Dans ce cas on note que l'on passe de l'une aux autres en permutant circulairement P, Q et R (*resp.* x, y et z).

On peut se demander si la proposition 1 admet une réciproque. C'est le cas lorsque l'ouvert de départ Ω est d'une forme bien précise :

Définition 5

- *Une partie P de $\mathbb{R}^n$ est* étoilée par rapport à $A \in P$ *si pour tout $M \in P$, $[A, M] \subset P$.*
- *Une partie P de $\mathbb{R}^n$ est* étoilée *s'il existe $A \in P$ tel que P soit étoilée par rapport à A.*



Exemple 1

- *Les parties convexes ;*
- $\mathbb{R}^n$ *privé d'une demi-droite (*resp. *demi-sva)*
- Mais non $\mathbb{R}^n$ *privé d'un point, d'une droite, ou d'une sva.*

On peut montrer le

Théorème 1 (Poincaré) *Si $\vec{V}$ est un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, sur l'ouvert* étoilé *Ω de $\mathbb{R}^n$ et si pour tous i, $j \in [\![1, n]\!]$, $\frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}$ alors $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire sur Ω. De plus si f et g sont deux potentiels scalaires de $\vec{V}$ sur Ω, alors $f - g$ est constante sur Ω.*

4 Laplacien

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$, sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

Définition 6 *Le* laplacien *de f est la divergence du gradient de f :*

$$\Delta f = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)$$

C'est donc une application de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ sur Ω.

Il résulte du calcul du gradient, et de la définition de la divergence, que :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

5 Rotationnel

Dans tous ce paragraphe on se place *en dimension 3*. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

5.1 Préliminaires

- On dit que f est *antisymétrique* si $(f(\vec{x}) \mid y) = -(\vec{x} \mid f(\vec{y})) = (\vec{x} \mid -f(\vec{y}))$ pour tous $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Dans une base *orthonormale* de $\mathbb{R}^3$ (comme la base canonique) cela se caractérise par l'antisymétrie de la matrice représentative de f.
- Plus généralement on peut montrer qu'il existe un unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, noté f^* et appelé *adjoint* de f, tel que $(f(\vec{x}) \mid \vec{y}) = (\vec{x} \mid f^*(\vec{y}))$ pour tous $\vec{x}$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^3$. Dans une base ON de $\mathbb{R}^3$, la matrice représentative de f^* est la transposée de celle de f. Ainsi, f est antisymétrique *ssi* $f^* = -f$. Mais même lorsque ce n'est pas le cas, $f - f^*$ est toujours antisymétrique puisque $(f - f^*)^* = f^* - f^{**} = f^* - f = -(f - f^*)$.
- On montre d'autre part "qu'un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$ est le produit vectoriel avec un unique vecteur", càd que si $f \in L\left(\mathbb{R}^3\right)$ est antisymétrique, il existe un unique vecteur $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ tel que : $f(\vec{x}) = \vec{r} \wedge \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
- Voyons enfin comment sont reliées la matrice de f et les coordonnées de $\vec{r}$. Supposons que $\vec{r} = p\,\vec{\imath} + q\,\vec{\jmath} + r\,\vec{k}$ dans la base canonique (qui est OND) de $\mathbb{R}^3$. On calcule $\vec{r} \wedge \vec{\imath} = r\,\vec{\jmath} - q\,\vec{k}$; $\vec{r} \wedge \vec{\jmath} = -r\,\vec{\imath} + p\,\vec{k}$; $\vec{r} \wedge \vec{k} = q\,\vec{\imath} - p\,\vec{\jmath}$. D'où

$$\text{mat}\left((\vec{x} \mapsto \vec{r} \wedge \vec{x}) \, ; \mathcal{E}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix} \; ;$$

on voit alors que les coordonnées du vecteur $\vec{r}$ sont les coefficients d'indices $(3, 2)$, $(1, 3)$ et $(2, 1)$ de la matrice représentative de f dans $\mathcal{E}$ (ou toute autre BOND).

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout $M \in \Omega$, la différentielle $d\vec{V}(M)$ de $\vec{V}$ en M est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, ainsi que son adjoint $\left(d\vec{V}(M)\right)^*$. Donc $d\vec{V}(M) - \left(d\vec{V}(M)\right)^*$ est un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$ et d'après les préliminaires il existe un unique vecteur $\vec{r}$ de $\mathbb{R}^3$ tel que $\left(d\vec{V}(M) - \left(d\vec{V}(M)\right)^*\right) \bullet \vec{x} = \vec{r} \wedge \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

Définition 7 *$\vec{r}$ est le* rotationnel *de $\vec{V}$ en M noté*

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(M).$$

Il est donc *caractérisé* par :

$$\left(d\vec{V}(M) - \left(d\vec{V}(M)\right)^*\right) \bullet \vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(M) \wedge \vec{x}$$

pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

5.2 Calcul

On se place dans la base canonique $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^3$ qui est orthonormale directe. Notant $\vec{V} = P\,\vec{\imath} + Q\,\vec{\jmath} + R\,\vec{k}$, la différentielle de $\vec{V}$ en $M \in \Omega$ et son adjoint $\left(d\vec{V}(M)\right)^*$ ont pour matrices représentatives dans $\mathcal{E}$ respectivement : $\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}(M)$ et $\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial Q}{\partial z} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}(M)$ donc $d\vec{V}(M) - \left(d\vec{V}(M)\right)^*$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} & 0 & \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} & \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} & 0 \end{pmatrix}(M)$$

c'est une matrice antisymétrique et on reconnaît d'après les préliminaires qu'elle correspond au produit vectoriel par le vecteur

$$\begin{array}{rcl} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}(M) & = & \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)(M)\,\vec{\imath} \\ & + & \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)(M)\,\vec{\jmath} \\ & + & \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(M)\,\vec{k} \end{array}$$

Remarque 1 *On peut retenir ces expressions grâce au moyen mnémotechnique*

$$\text{“}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}(M) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & P & \vec{\imath} \\ \frac{\partial}{\partial y} & Q & \vec{\jmath} \\ \frac{\partial}{\partial z} & R & \vec{k} \end{vmatrix}(M)\text{”},$$

déterminant symbolique qu'on développe par rapport à la dernière colonne.

Remarque 2 *Les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}(M)$ se déduisent l'une de l'autre par permutation circulaire de P, Q, R et x, y et z.*

Remarque 3 *Dire que le rotationnel de $\vec{V}$ est nul revient à écrire les trois équations de fermeture en dimension 3, autrement dit :*

Proposition 2 (Poincaré) *Si $\vec{V}$ dérive d'un potentiel scalaire, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V} = \vec{0}$, avec réciproque si l'ouvert Ω de définition est étoilé.*

On a enfin :

Proposition 3 *Si $\vec{V}$ est un champ $\mathcal{C}^k$, $k \geq 2$ sur Ω,*

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{V}\right)(M) = 0$$

pour tout $M \in \Omega$.

Potentiel vecteur

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^k$ sur un ouvert Ω.

Définition 8 *On dit que $\vec{V}$* dérive d'un potentiel vecteur *s'il existe un champ de vecteurs $\vec{W} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ telle que*

$$\vec{V} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{W}.$$

$\vec{W}$ étant alors appelée un *potentiel vecteur de $\vec{V}$.*

On peut alors réécrire le

Théorème 2 (Poincaré)

1. *Si $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur sur Ω, $\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$ sur Ω.*

2. *Si Ω est* étoilé *et si $\mathrm{div}\,\vec{V} = 0$ sur Ω, $\vec{V}$ dérive d'un potentiel vecteur.*

6 Circulation d'un champ de vecteurs

On considère un arc géométrique γ de $\mathbb{R}^n$, image du paramétrage $\mathcal{C}^1$ $F : I \to \mathbb{R}^n$; $t \mapsto M = F(t)$ défini sur un intervalle $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Soit d'autre part un champ de vecteurs $\vec{V}$ continu au voisinage de $\mathrm{Im}(\gamma)$ (càd, l'ouvert Ω de définition de $\vec{V}$ contient l'image de γ).

Lemme 1 *Le réel $\int_a^b \left(\vec{V}(M(t)) \mid \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}(t)\right) \mathrm{d}t$ est* indépendant *du paramétrage F de γ.*

Définition 9 *La* circulation de $\vec{V}$ *le long de l'arc γ est le réel précédent, noté*

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{M}$$

On note aussi lorsque $\vec{V} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath}\,(+R\vec{k})$,

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{M} = \int_a^b P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\ (+R\mathrm{d}z)$$

Cette définition est particulièrement importante lorsqu'elle est appliquée à un champ de gradients :

Proposition 4 *Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$, au voisinage de γ,*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overrightarrow{\mathrm{grad}} f \cdot \mathrm{d}\vec{M} &= \int_a^b \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f\left(M\left(t\right)\right) \mid \tfrac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\left(t\right)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \mathrm{d}f\left(M\left(t\right)\right) \bullet \tfrac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\left(t\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(f\left(M\left(t\right)\right)\Big)\left(t\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[f\left(M\left(t\right)\right)\right]_a^b = f\left(M\left(b\right)\right) - f\left(M\left(a\right)\right)\end{aligned}$$

Cela signifie que la circulation d'un champ de gradients est *indépendante du chemin* suivi pour aller d'une extrémité $M(a)$ à l'autre $M(b)$ de l'arc considéré. Cette relation peut également s'énoncer en termes de *formes différentielles*, *cf.* § 7.1. On en déduit notamment que :

- la circulation d'un champ de gradients le long d'un arc γ *fermé* (parfois notée $\oint_\gamma \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{M}$) est nulle ;
- en faisant circuler un champ entre un point fixé et un point quelconque de Ω on peut retrouver ainsi le potentiel dont il dérive éventuellement (remarque utilisée plus loin dans la démonstration du théorème de Poincaré) ;
- cette dernière relation peut servir de condition nécessaire pour savoir si un champ de vecteurs donné dérive ou non d'un potentiel scalaire.

7 Appendice

7.1 Notion de forme différentielle

Commençons par étudier un cas particulier.

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Si $a \in \Omega$, la différentielle de f en a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, un élément du dual $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. C'est le produit scalaire avec le gradient de f en a (*cf.* § 3.). Son expression en un vecteur $h = (h_1, ..., h_n)$ est donnée par : $\mathrm{d}f(a) \bullet h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \vec{e}^{\,*i}(h)$, où $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On peut donc écrire : $\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \vec{e}^{\,*i}$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, notons $x_i = \vec{e}^{\,*i}{}_{|\Omega}$ la restriction à Ω de $\vec{e}^{\,*i}$. On a $x_i(a+h) = x_i(a) + x_i(h) = x_i(a) + \vec{e}^{\,*i}(h)$; il en résulte que x_i est de classe $\mathcal{C}^1$ et : $dx_i(a) = \vec{e}^{\,*i}$ pour tout a. On obtient donc la relation : $\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \mathrm{d}x_i(a)$. Étant valable pour tout $a \in \Omega$, on la note :

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i.$$

Ceci motive la définition suivante, qui généralise ce cas particulier :

Définition 10 *Une* forme différentielle *(de degré 1) de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω est une application ω de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $(\mathbb{R}^n)^* = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

On note

$$\omega = \sum_{i=1}^n P_i \,\mathrm{d}x_i$$

où P_1, ..., $P_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sont n applications $\mathcal{C}^k$ (les coordonnées de ω).

Cette écriture signifie que pour tout point a de Ω : $\omega(a) = \sum_{i=1}^n P_i \,\mathrm{d}x_i(a)$ ($\in (\mathbb{R}^n)^*$), et rappelons que la différentielle $\mathrm{d}x_i(a)$ n'est autre que la $i^{\text{ème}}$ forme linéaire coordonnée $\vec{e}^{\,*i}$ (quel que soit a).

Le cas particulier initial correspond à la situation suivante :

Définition 11 *La forme différentielle $\mathcal{C}^k$ ω est* exacte *s'il existe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^{k+1}$ telle que*

$$\omega = \mathrm{d}f.$$

On dit alors que f est une *primitive* de ω sur Ω.

Cela signifie, d'après les calculs précédents, que pour $i = 1$, ..., n, $P_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Si l'on suppose $k \geq 1$, on a donc nécessairement (d'après Schwarz) : $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$. Cela justifie la

Définition 12 *La forme différentielle $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 1$) ω est* fermée *sur Ω si*

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$$

pour tous i, $j \in [\![1, n]\!]$.

On a donc immédiatement :

Proposition 5 *Si ω est exacte, ω est fermée.*

En outre, le th. 1. peut maintnenant être énoncé :

Théorème 3 (Poincaré) *Si Ω est un ouvert étoilé et si ω est une forme différentielle $\mathcal{C}^k$ sur Ω, ω est exacte* ssi *elle est fermée. De plus, deux primitives de ω sur Ω diffèrent d'une constante.*

Intégrale curviligne

Il s'agit de réécrire la définition 9. en termes de formes différentielles.

Soit γ un arc géométrique $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$, image du paramétrage $F : I \to \mathbb{R}^n$; $t \mapsto M = F(t)$ où $F(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ et $I = [a, b]$.

Soit $\omega = \sum_{i=1}^n P_i \,\mathrm{d}x_i$ une forme différentielle continue sur un ouvert Ω contenant $\mathrm{Im}(\gamma)$.

Définition 13 *L'*intégrale de ω *sur γ est le réel (indépendant du paramétrage)*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n P_i(F(t))\, x_i'(t) \,\mathrm{d}t$$

Dans le cas particulier (important) d'une forme différentielle exacte $\omega = \mathrm{d}f$ on reformule ainsi la propriété 4. (en notant $A = F(a)$ et $B = F(b)$ les extrémités de γ) :

Théorème 4 *L'intégrale de $\omega = \mathrm{d}f$ sur γ :*

$$\int_\gamma \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$$

est "indépendante du chemin suivi pour aller de A à B".

Cette propriété est la contrepartie en dimension n du th. fondamental du calcul intégral réel.

7.2 Démonstration du lemme 1

On change de paramétrage. γ est également l'image de $G : [a', b'] \to \mathbb{R}^n$. On passe de F à G par une relation du type $F = G \circ \varphi$ où φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[a, b]$ sur $[a', b']$. On calcule alors

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b \left(\vec{V}(M(t)) \mid \tfrac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\vec{V}(F(t)) \mid \vec{F}'(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\vec{V}\left(G(\varphi(t))\right) \mid \left(\overrightarrow{G \circ \varphi}\right)'(t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \left(\vec{V}\left(G(\varphi(t))\right) \mid \vec{G}'(\varphi(t))\right) \varphi'(t)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \left(\vec{V}(G(u)) \mid \vec{G}'(u)\right) \mathrm{d}u \\
&= \int_{a'}^{b'} \left(\vec{V}(G(u)) \mid \vec{G}'(u)\right) \mathrm{d}u \ \blacksquare
\end{aligned}$$

7.3 Démonstration du théorème 1. (Poincaré)

Le champ $\vec{V}$ est $\mathcal{C}^1$ sur Ω et vérifie les équations de fermeture ; Ω est étoilé par rapport au point A. On a vu que si $M \in \Omega$ et si $\vec{V}$ dérivait d'un potentiel scalaire f, la circulation de $\vec{V}$ de A à M serait $f(M) - f(A)$, quel que soit le chemin suivi dans Ω. On choisit donc de définir f comme la circulation de $\vec{V}$ le long du chemin le plus simple possible : le segment $[A, B]$ dont l'hypothèse "Ω étoilé" nous assure qu'il est inclus dans Ω. Ce segment est paramétré p. ex. par l'application $[0, 1] \to \mathbb{R}^n$; $t \mapsto A + t\overrightarrow{AM}$, dont le vecteur dérivé en tout $t \in [0, 1]$ est $\overrightarrow{AM}$. On est donc conduit à poser

$$f(M) = \int_0^1 \left(\vec{V}\left(A + t\overrightarrow{AM}\right) \mid \overrightarrow{AM}\right) \mathrm{d}t.$$

Montrons que $\vec{V}$ dérive du potentiel scalaire f, càd que $\frac{\partial f}{\partial x_i} = P_i$ pour $1 \leq i \leq n$ (où $\vec{V} = \sum_{i=1}^n P_i \vec{e}_i$). Le calcul étant le même pour tout i, on se contente de l'effectuer pour $i = 1$. Notons $A = (a_1, ..., a_n)$, $M = (x_1, ..., x_n)$. Alors

$$\begin{aligned}
f(M) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \\
&\quad \times P_i\left(a_1 + t(x_1 - a_1), ..., a_n + t(x_n - a_n)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{i=1}^n g_i(t, x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et comme chaque g_i est continue par rapport à $(t, x_1, ..., x_n)$ de même que $\frac{\partial g_i}{\partial x_1}$, on peut appliquer le *théorème "de dérivation sous le signe $\int$"* qui permet d'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(M) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_1}(t, x_1, ..., x_n)\, \mathrm{d}t$$

Le calcul de $\frac{\partial g_i}{\partial x_1}$ comporte le cas particulier $i = 1$:

- Si $i \neq 1$, $\frac{\partial g_i}{\partial x_1}(M) = t\frac{\partial P_i}{\partial x_1}(M)(x_i - a_i) = t\frac{\partial P_1}{\partial x_i}(M)(x_i - a_i)$ puisque $\vec{V}$ vérifie les équations de fermeture.
- Si $i = 1$, g_i est le produit de deux fonctions de x_1 donc : $\frac{\partial g_1}{\partial x_1}(M) = t\frac{\partial P_1}{\partial x_1}(M)(x_1 - a_1) + P_1(M)$.

Donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(M) &= \int_0^1 t\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_1}{\partial x_i}(M)(x_i - a_i)\right) \\
&\quad + P_1(M)\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(t\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}} P_1(M) \mid \overrightarrow{AM}\right) + P_1(M)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(t\mathrm{d}P_1(M) \bullet \overrightarrow{AM} + P_1(M)\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(t\varphi'(t) + \varphi(t)\right) \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

où $\varphi(t) = P_1(M) = P_1\left(A + t\overrightarrow{AM}\right)$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(M) &= [t\varphi(t)]_0^1 \\
&= \varphi(1) \\
&= P_1\left(A + \overrightarrow{AM}\right) \\
&= P_1(M) \ \blacksquare
\end{aligned}$$