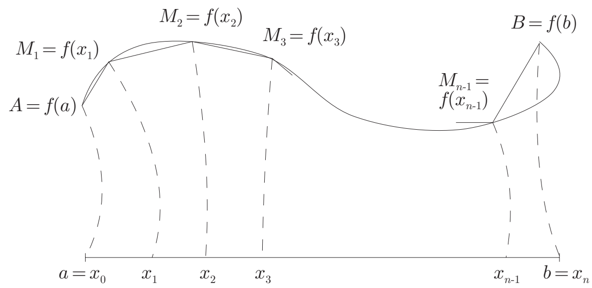
PCSI - mathématiques

# Étude métrique des courbes

## 1 Arcs paramétrés rectifiables

$E$ est $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. $d$ est la distance associée à la norme euclidienne : $d(X,Y) = \left\|\overrightarrow{XY}\right\|$. Soit $F : [a,b] \to E$ un arc paramétré $\mathcal{C}^k$ de $E$. Si $d = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision de $[a,b]$ on pose $\ell(F,d) = \sum_{i=0}^{n-1} d(F(x_i), F(x_{i+1}))$. $\Delta_{[a,b]}$ étant l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ on pose $\Lambda_F = \{\ell(F,d) \mid d \in \Delta_{[a,b]}\}$.

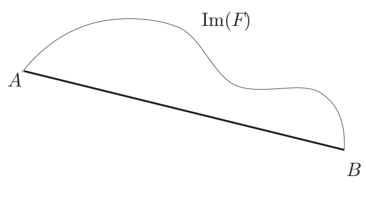



**Définition 1** *On dit que $F$ est* rectifiable *si $\Lambda_F$ est majoré dans $\mathbb{R}$. Si c'est le cas, la* longueur *de $F$ est le réel positif $L(F) = \sup(\Lambda_F)$.*

En d'autres termes, la longueur de $F$ est la borne supérieure (si elle existe) des longueurs des lignes brisées inscrites sur $F$.

**Remarque 1** *On a*

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \left\|\overrightarrow{F(a)F(b)}\right\| = \left\|\textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \overrightarrow{F(x_i)F(x_{i+1})}\right\| \\ &\leq \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \left\|\overrightarrow{F(x_i)F(x_{i+1})}\right\| \leq L(F).\end{aligned}$$




On va de $A$ à $B$ "en ligne droite" en considérant le segment $[A,B]$ comme l'image du paramétrage $\delta : t \mapsto A + t\,\overrightarrow{AB}$ de $[0,1]$ dans $E$.

Le calcul donne $L(\delta) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \leq L(F)$, donc : "la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre".

On montre :

**Théorème 1** *Soit $F$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ où $k \geq 1$ de $[a,b]$ dans $E$ (avec $a < b$). Alors $F$ est rectifiable et :*

$$L(F) = \int_a^b \left\|\vec{F}'(t)\right\| \mathrm{d}t.$$

## 2 Abscisses curvilignes sur un arc paramétré

$F$ est un arc paramétré $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$. On ne suppose pas ici que l'intervalle $I$ de départ de $F$ est un segment.

### 2.1 Orientation de $\mathrm{Im}(F)$

- On peut aussi paramétrer la même courbe avec (par exemple) $G : -I \to E\,;\, t \mapsto F(-t) = F \circ \varphi(t)$ où $\varphi(t) = -t$ est une fonction décroissante de $t$.
- Plus généralement on passe de $F$ à un autre paramétrage $G$ ayant la même image (décrivant la même courbe) grâce à une relation du type $F = G \circ \varphi$ où $\varphi$ est — on le démontre — un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme, donc une application (strictement) monotone. On dit alors que $F$ est de même sens que $G$ (*resp.* de sens contraire) si $\varphi \uparrow$ (*resp.* $\varphi \downarrow$).
- *Orienter* $\mathrm{Im}(F)$ c'est choisir parmi les deux (au maximum) sens de parcours possibles sur son image. Si c'est celui dans lequel se déplace un point $M = F(t)$ lorsque $t$ croît on dit qu'on a orienté $\mathrm{Im}(F)$ "dans le sens des $t$ croissants".

### 2.2 Abscisse curviligne

On choisit $t_0 \in I$. L'application

$$t \mapsto \sigma(t) = \int_{t_0}^{t} \left\|\vec{F}'(u)\right\| \mathrm{d}u$$

est l'abscisse curviligne sur $F$ orienté dans le sens des $t$ croissants d'origine $M_0 = F(t_0)$. L'application $\sigma : I \to \mathbb{R}\,;\, t \mapsto s = \sigma(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ et on a pour tout $t \in I$ : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sigma'(t) = \left\|\vec{F}'(t)\right\|$. Il résulte immédiatement du th. 1 que :

**Théorème 2** *Si $a$ et $b$ sont des points de $I$ et si $F_{a,b}$ est la restriction de $F$ à $[a,b]$, $F_{a,b}$ est rectifiable et sa longueur est $L(F_{a,b}) = |\sigma(b) - \sigma(a)|$.*

### 2.3 Cas particuliers

$E_2$ est le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est la base canonique.

1. Si $F$ est de la forme $x \mapsto F(x) = (x,y)$ où $y = f(x)$ ("courbe d'équation $y = f(x)$") orienté dans le sens des $x$ croissants, si $x \mapsto s = \sigma(x)$ est l'abscisse curviligne sur $F$ d'origine $M_0 = F(x_0)$, on a en posant $y' = f'(x)$ : $\vec{F}'(x) = \vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath}$, d'où $\left\|\vec{F}'(x)\right\| = \sqrt{1+y'^2}$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sigma'(x) = \sqrt{1+y'^2}$.

2. Si $F$ est de la forme $t \mapsto F(t) = (x(t), y(t))$ orienté dans le sens des $t$ croissants, si $t \mapsto s = \sigma(t)$ est l'abscisse curviligne sur $F$ d'origine $M_0 = F(t_0)$, on a : $\vec{F}'(t) = x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath}$, d'où $||\vec{F}'(t)|| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sigma'(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. On a $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$, ce qu'on écrit : $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.
3. Si $F$ désigne la courbe d'équation polaire $r = f(\theta)$, donc $F(\theta) = r\,\vec{u}(\theta)$, orienté dans le sens des $\theta$ croissants, et si $\theta \mapsto s(\sigma(\theta))$ est l'abscisse curviligne sur $F$ d'origine $M_0 = F(\theta_0)$ on a : $||\vec{F}'(\theta)|| = \sqrt{r^2 + r'^2}$, donc : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \sigma'(\theta) = \sqrt{r^2 + r'^2}$. On a $\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$, ce qu'on écrit : $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2$.

### 2.4 Exemples de calculs d'abscisses curvilignes

1. Cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}(O\,;a)$. Une équation polaire est $r = a$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$. On oriente $\mathcal{C}$ dans le sens des $\theta$ croissants et on note $s$ l'abscisse curviligne d'origine $A = F(0) = O + a\,\vec{\imath}$. On a $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{a^2} = a$ ; d'où $s = \int_0^\theta a\mathrm{d}u = a\theta$. Longueur : $L(\mathcal{C}) = s(2\pi) = 2\pi a$.
2. Chaînette. $\gamma$ est la courbe d'équation $y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$. On oriente $\gamma$ dans le sens des $x$ croissants et on note $s$ l'abscisse curviligne d'origine $A = F(0) = O + a\,\vec{\jmath}$. On a $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\left(\frac{x}{a}\right)} = \mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ ; d'où $s = \int_0^x \mathrm{ch}\left(\frac{u}{a}\right)\mathrm{d}u = a\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right)$.
3. Parabole. $\mathcal{P}$ est la parabole d'équation $x^2 = 2py$ ; on la paramètre sous la forme $x = pt$ ; $y = \frac{pt^2}{2}$. On oriente $\mathcal{P}$ dans le sens des $t$ croissants et on note $s$ l'abscisse curviligne d'origine $O = F(0)$. On a $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{p^2 + p^2t^2} = p\sqrt{1 + t^2}$ d'où $s = p\int_0^t \sqrt{1 + u^2}\mathrm{d}u = p\int_0^{\arg\mathrm{sh}\, t} \mathrm{ch}^2\, v\mathrm{d}v = \frac{p}{2}\int_0^{\arg\mathrm{sh}\, t} (1 + \mathrm{ch}\, 2v)\,\mathrm{d}v = \frac{p}{2}\left[v + \mathrm{sh}\, v\,\mathrm{ch}\, v\right]_0^{\arg\mathrm{sh}\, t} = \frac{p}{2}\left(\arg\mathrm{sh}\, t + t\sqrt{1 + t^2}\right)$.
4. Cardioïde. $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation polaire $r = a(1 + \cos\theta)$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$. On oriente $\mathcal{C}$ dans le sens des $\theta$ croissants et on note $s$ l'abscisse curviligne d'origine $A = F(0) = O + 2a\,\vec{\imath}$. On a $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = \sqrt{r^2 + r'^2} = a\sqrt{(1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = a\sqrt{2 + 2\cos\theta} = 2a\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2}} = +2a\cos\frac{\theta}{2}$ puisque $\theta \in [-\pi, \pi]$. Donc $s = 2a\int_0^\theta \cos\frac{u}{2}\mathrm{d}u = 4a\sin\frac{\theta}{2}$. Longueur totale : $L(\mathcal{C}) = [s]_{-\pi}^{\pi} = 8a$.

## 3 Paramétrisation par l'abscisse curviligne

On note $(x, y)$ le produit scalaire de $E = \mathbb{R}^n$.

On montre que si $f$ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle $I$ dans $E$ et *ne s'annulant pas* sur $I$, l'application $t \mapsto \left\|\vec{f}(t)\right\|$ est également de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$.

Soit $F$ un arc paramétré $\mathcal{C}^k$ (où $k \geq 1$) de $E$ et *régulier* (càd : tout point de $F$ est régulier). On a donc $t \mapsto \left\|\vec{F}'(t)\right\|$ qui est $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $I$ (puisque $\vec{F}'(t)$ ne s'annule pas).

**Définition 2** *$F$ est un* paramétrage normal *si*

$$\forall t \in I, \left\|\vec{F}'(t)\right\| = 1.$$

**Théorème 3** *Soit $F : I \to E$ un arc paramétré régulier et soit $t_0 \in I$. L'application $t \mapsto s = \sigma(t) = \int_{t_0}^t \left\|\vec{F}'(u)\right\|\mathrm{d}u$ (abscisse curviligne d'origine $M_0 = F(t_0)$ sur $F$ orienté dans le sens des $t$ croissants) est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $I$ sur $I_0 = \sigma\langle I\rangle$, et l'application $F_0 : I_0 \to E\,; s \mapsto F_0(s) = F\circ\sigma^{-1}(s)$ est un paramétrage normal (de* $\mathrm{Im}(F) = \mathrm{Im}(F_0)$*).*

***Dém.* :**
- $\sigma$ est dérivable sur $I$ et $\sigma'(t) = \left\|\vec{F}'(t)\right\| > 0$ puisque $F$ est régulier. Ainsi en posant $I_0 = \sigma\langle I\rangle$, $I_0$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sigma : I \to I_0$ est continue et strictement croissante, donc $\sigma$ est un homéomorphisme de $I$ sur $I_0$. Or $\sigma$ est dérivable et $\sigma'(t) = \left\|\vec{F}'(t)\right\|$ ; comme $t \mapsto \left\|\vec{F}'(t)\right\|$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur $I$ il en résulte que $\sigma$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I$. Or $\sigma'$ ne s'annule pas sur $I$ donc finalement : *$\sigma$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de $I$ sur $I_0$.*
- Définissons $F_0 : I_0 \to E\,; s \mapsto F_0(s) = F\circ\sigma^{-1}(s)$. On a $F_0 = F\circ\sigma^{-1}$; or $F$ et $\sigma^{-1}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$, donc *$F_0$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $I_0$*. Pour tout $s \in I_0$ on a $\left(\sigma^{-1}\right)'(s) = \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))} = \frac{1}{\left\|\vec{F}'(\sigma^{-1}(s))\right\|}$ (puisque $\sigma'(t) = \left\|\vec{F}'(t)\right\|$) donc $\vec{F}_0'(s) = \left(\sigma^{-1}\right)'(s).\vec{F}'(\sigma^{-1}(s)) = \frac{1}{\left\|\vec{F}'(\sigma^{-1}(s))\right\|}.\vec{F}'(\sigma^{-1}(s))$ ce qui montre que pour tout $s \in I_0$ : $\left\|\vec{F}_0'(s)\right\| = 1$. Ainsi *$F_0$ est un paramétrage normal.* ∎

## Notations usuelles

$F : t \mapsto M = F(t)$ est orienté dans le sens des $t$ croissants ; on note $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}'(t)$.

On choisit une origine $M_0 = F(t_0)$ sur $F$ et on note $t \mapsto s = \sigma(t)$ l'abscisse curviligne sur $F$ d'origine $M_0 = F(t_0)$. On an alors : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sigma'(t) = \left\|\vec{F}'(t)\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\right\|$.

On note $s \mapsto M = F_0(s)\,(= F(\sigma^{-1}(s)))$ le paramétrage normal par l'abscisse curviligne. On a donc $M = F(t) = F_0(s)$ $(F_0(s) = F(\sigma^{-1}(s)),\ F(t) = F_0(\sigma(t)))$. On pose $\vec{t} = \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s} = \vec{F}_0'(s)$. On a donc : $\left\|\vec{t}\right\| = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}\right\| = 1$ (puisque $\vec{t} = \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}$ et par définition $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\right\|$.

Le vecteur $\vec{t}$ est *le* vecteur tangent en $M = F(t) = F_0(s)$.

## 4 Courbure des courbes planes

$E_2$ est le plan euclidien orienté $\mathbb{R}^2$. Si $\theta \in \mathbb{R}$ on note $\mathrm{rot}_\theta$ la rotation d'angle $\theta$ de $E_2$. C'est donc l'élément de $\mathcal{SO}(E_2)$ dont la matrice est $P_\theta = \left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ dans toutes les BOND de $E_2$.

Si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est une BOND de $E_2$ et si $x = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$, on a $\mathrm{rot}_{\frac{\pi}{2}}(x) = -\beta\,\vec{\imath} + \alpha\,\vec{\jmath}$ (puisque $P_{\frac{\pi}{2}} = \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$)

On choisit lorsque c'est nécessaire une BOND $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan $E_2$.

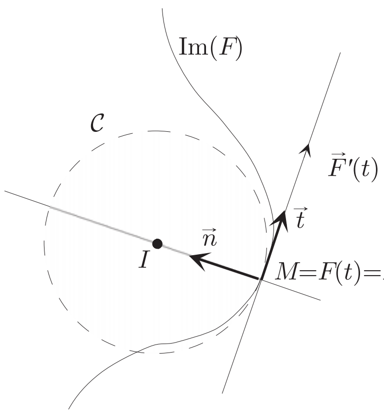
$F$ est un arc paramétré *régulier* de classe $\mathcal{C}^k$ de $E_2$, avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k \geq 2$.

## 4.1 Courbure et rayon de courbure en un point de $F$

On oriente $F$ dans le sens des $t$ croissants et on choisit une origine $M_0 = F(t_0)$ sur $F$. On lui associe le paramétrage (normal) par l'abscisse curviligne : $F_0 : I_0 \to E_2\,;\, s \mapsto F_0(s) = F(\sigma^{-1}(s))$. On a pour tout point $M$ de l'arc : $M = F(t) = F_0(s)$ avec $s = \sigma(t)$ et $t = \sigma^{-1}(s)$. $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}'(t)$, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sigma'(t)$, $\vec{t} = \vec{F}_0'(s) = \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}$, $\left\|\vec{t}\right\| = 1$.

Le vecteur $\vec{n} = \mathrm{rot}_{\frac{\pi}{2}}\left(\vec{t}\right)$ est *le* vecteur normal à l'arc en $M$. La tangente en $M$ est la droite $\mathcal{T}_M = M + \mathbb{R}\vec{t} = M + \mathbb{R}\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}$ et la *normale* en $M$ est $\mathcal{N}_M = M + \mathbb{R}\vec{n}$, qui admet pour équation $\left(\overrightarrow{MX} \mid \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\right) = 0$.

- On a $M = F(t) = F_0(s) = F_0(\sigma(t))$, donc $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}'(t) = \sigma'(t)\vec{F}_0'(\sigma(t))$ soit $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\vec{t}$. Ainsi $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\vec{t}$, et comme $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sigma'(t) = \left\|\vec{F}'(t)\right\|$, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\right\| > 0$, ce qui montre que $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}$ et $\vec{t}$ sont (colinéaires et) *de même sens.*




- Comme $\vec{t} = \vec{F}_0'(s)$, la fonction $s \mapsto \vec{t} = \frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Si $\vec{t} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$, les fonctions $s \mapsto \alpha$ et $s \mapsto \beta$ sont de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et comme $\vec{n} = -\beta\,\vec{\imath} + \alpha\,\vec{\jmath}$, la fonction $s \mapsto \vec{n}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. De plus les fonctions $t \mapsto s = \sigma(t)$ et $s \mapsto t = \sigma^{-1}(s)$ sont de classe $\mathcal{C}^k$. Par suite : *$\vec{t}$ et $\vec{n}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ des paramètres $s$ et $t$.*
- On a pour tout $s$ : $\left(\vec{t}(s) \mid \vec{t}(s)\right) = 1$ d'où par dérivation (possible car $k-1 \geq 1$) : $2\left(\vec{t}(s) \mid \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\right) = 0$, donc $\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} \in \vec{t}^{\perp} = \mathbb{R}\vec{n}$, ce qui montre qu'*il existe une fonction $s \mapsto \rho$ telle que :*
$$\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} = \rho\,\vec{n} \tag{1}$$
Le réel $\rho$ est la *courbure* (algébrique) en $M$.
- Pour que l'on ait $\rho \neq 0$ il faut et il suffit que $\left(\vec{t}, \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\right)$ soit libre (puisque $\det_{(\vec{t},\vec{n})}\left(\vec{t}, \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\right) = \left|\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho \end{smallmatrix}\right| = \rho$), c'est à dire que $\left(\vec{F}_0'(s), \vec{F}_0''(s)\right)$ soit libre, ce qui montre que *$\rho$ est non nul si et seulement si $M$ n'est pas un point d'inflexion géométrique.* Dans le cas où $\rho \neq 0$ on pose $R = \frac{1}{\rho}$ : *rayon de courbure* (algébrique) en $M$, et $I = M + R\vec{n}$ : *centre de courbure* en $M$. Le cercle $\mathcal{C} = \mathcal{C}\left(I\,;\,|R|\right)$ est le *cercle osculateur* en $M$ ; c'est le cercle qui “ressemble le plus” à la courbe au voisinage de $M$[1].
- En dérivant la relation $\left(\vec{t} \mid \vec{n}\right) = 0$ (vraie pour tout $s$) on obtient $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} \mid \vec{n}\right) + \left(\vec{t} \mid \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s}\right) = 0$ ; comme $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s} \mid \vec{n}\right) = \rho\left(\vec{n} \mid \vec{n}\right) = \rho$, on a $\left(\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} \mid \vec{t}\right) = -\rho$.
- Comme $\left(\vec{n} \mid \vec{n}\right) = 1$ pour tout $s$, la dérivation donne $2\left(\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} \mid \vec{n}\right) = 0$. Or $\left(\vec{t}, \vec{n}\right)$ est une BON de $E_2$ (car $\left\|\vec{t}\right\| = \left\|\vec{n}\right\| = 1$ et $\vec{t} \perp \vec{n}$), donc :
$$\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}s} = -\rho\,\vec{t} \tag{2}$$
Si $\vec{t} = \alpha\,\vec{\imath} + \beta\,\vec{\jmath}$, on a $\vec{n} = -\beta\,\vec{\imath} + \alpha\,\vec{\jmath}$ et $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, donc $\mathrm{Det}\left(\vec{t}, \vec{n}\right) = \left|\begin{smallmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{smallmatrix}\right| = 1$, donc : $\left(\vec{t}, \vec{n}\right)$ est une BON *directe* de $E_2$.

Le repère (orthonormal direct) $\left(M\,;\,\left(\vec{t}, \vec{n}\right)\right)$ est le *repère de* Frenet en $M$, et les formules (1) et (2) sont les *formules de* Frenet en $M$.

On a : $\mathrm{Det}\left(\vec{t}, \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\right) = \mathrm{Det}\left(\vec{t}, \rho\vec{n}\right) = \rho\,\mathrm{Det}\left(\vec{t}, \vec{n}\right) = \rho$ (car $\mathrm{Det}\left(\vec{t}, \vec{n}\right) = 1$) donc :
$$\rho = \mathrm{Det}\left(\vec{t}, \frac{\mathrm{d}\vec{t}}{\mathrm{d}s}\right) = \mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}s^2}\right) \quad : \tag{3}$$
*$\rho$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k-2}$ des paramètres $s$ et $t$.*

## 4.2 Calcul de $\rho$ et $R$ en fonction du paramétrage initial

Le paramétrage d'origine est $t \mapsto F(t)$ orienté dans le sens des $t$ croissants. Calculons :
$$\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}\,;\; \frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s} + \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}s^2}$$
puis :
$$\begin{aligned} \mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}t^2}\right) &= \underbrace{\mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}\right)}_{=0} \\ &\quad + \mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}, \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}s^2}\right) \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3 \mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}s^2}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3 \rho \end{aligned}$$
donc :
$$\rho = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3}\,\mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}t^2}\right) \tag{4}$$
avec $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\right\|$.

[1] dans le sens suivant : la tangente à $\gamma$ en $M$ présente avec $\gamma$ un *contact d'ordre* 2 en $M$ (càd : coupe $\gamma$ en — au moins — deux points confondus en $M$). Il en est de même de toute courbe (e. p. de tout cercle) tangent à $\gamma$ en $M$. Le cercle osculateur a la particularité de présenter avec $\gamma$ un *contact d'ordre* 3 en $M$.

1. $F$ est la courbe d'équation $y=f(x)$. On a $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}x}=\vec\imath+y'\,\vec\jmath$ où $y'=f'(x)$ ; $\frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}x^2}=y''\,\vec\jmath$ donc $\mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}x^2}\right)=\begin{vmatrix}1&0\\y'&y''\end{vmatrix}=y''$. Or $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}x}\right\|=\sqrt{1+y'^2}$ donc :
$$\rho=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}\text{ et }R=\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.\qquad(4.a)$$

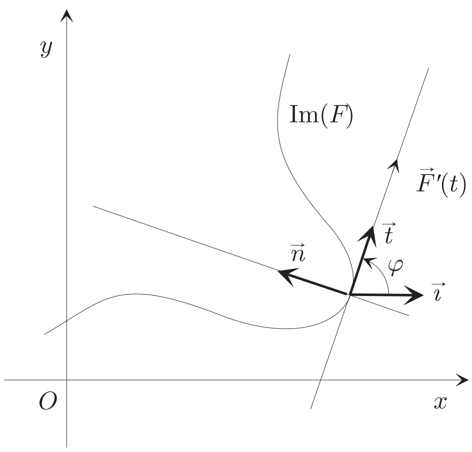
2. $F$ est donnée par le paramétrage en coordonnées cartésiennes $(x(t),y(t))$. On a $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}=x'\,\vec\imath+y'\,\vec\jmath$ ; $\frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}t^2}=x''\,\vec\imath+y''\,\vec\jmath$. Comme $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\right\|=\sqrt{x'^2+y'^2}$ on obtient :
$$\rho=\frac{\begin{vmatrix}x'&x''\\y'&y''\end{vmatrix}}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}\text{ et }R=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{\begin{vmatrix}x'&x''\\y'&y''\end{vmatrix}}.\qquad(4.b)$$

3. $F$ est la courbe d'équation polaire $r=f(\theta)$. $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}=r'\,\vec u+r\,\vec u'$, $\frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}\theta^2}=(r''-r)\,\vec u+2r'\,\vec u'$ ; $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\left|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}\right|=\sqrt{r^2+r'^2}$ donc :
$$\rho=\frac{\begin{vmatrix}r'&r''-r\\r&2r'\end{vmatrix}}{(r^2+r'^2)^{3/2}}=\frac{r^2+2r'^2-r\,r''}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.\qquad(4.c)$$
ce qui s'écrit aussi, sur un intervalle où $r$ ne s'annule pas :
$$\rho=\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^3\left(\frac{1}{r}+\left(\frac{1}{r}\right)''\right)}{\left(\left(\frac{1}{r}\right)^2+\left(\frac{1}{r}\right)'^2\right)^{3/2}}.\qquad(4.d)$$

**Remarque 2** *Si $M=O$, $r=0$ donc : $\rho=\frac{2r'^2}{(r'^2)^{3/2}}=\frac{2}{|r'|}$.*

## 4.3 Utilisation de l'angle $\varphi=(\widehat{\vec\imath,\vec t})$

On montre qu'*il existe une fonction $s\mapsto\varphi(s)$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$* telle que pour tout $s$ : $\vec t=\vec u(\varphi)$ (où $\vec u(\theta)=\cos\theta\,\vec\imath+\sin\theta\,\vec\jmath$), ce qui signifie que $(\widehat{\vec\imath,\vec t})=\varphi$ pour tout $s$.




Comme $\vec n=\mathrm{rot}_{\frac{\pi}{2}}\left(\vec t\right)$ on a : $\vec n=\vec u(\varphi+\frac{\pi}{2})=\vec u'(\varphi)$. Or $\vec t=\vec u(\varphi)$ donc en dérivant : $\frac{\mathrm{d}\vec t}{\mathrm{d}s}=\rho\,\vec n=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\,\vec u'(\varphi(s))=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\,\vec n$ donc :
$$\rho=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\ ;\ R=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}.\qquad(5)$$

1. $F$ est la courbe d'équation $y=f(x)$. On a $\vec t=\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\left(\vec\imath+y'\,\vec\jmath\right)=\cos\varphi\,\vec\imath+\sin\varphi\,\vec\jmath$ donc : $\cos\varphi=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, $\sin\varphi=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$, avec $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}x}\right\|=\sqrt{1+y'^2}$. Ces formules permettent, dans les cas favorables, de calculer $\varphi$ comme fonction de $x$.

2. $F$ est donnée par le paramétrage en coordonnées cartésiennes $(x(t),y(t))$. On a $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}=x'\,\vec\imath+y'\,\vec\jmath$. Donc $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}t}\right\|=\sqrt{x'^2+y'^2}$. Comme $\vec t=\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\vec\imath+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\vec\jmath=\cos\varphi\,\vec\imath+\sin\varphi\,\vec\jmath$ on a :
$$\cos\varphi=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\ \sin\varphi=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}.\qquad(6)$$
Or : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=x'\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ et de même $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=y'\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ ; avec $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$. Cela permet, dans les cas favorables, de calculer $\varphi$ comme fonction de $t$, d'où $\rho=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$, $R=\frac{1}{\rho}$ et $I=M+R\,\vec n$ (avec $\vec n=-\beta\,\vec\imath+\alpha\,\vec\jmath$ si $\vec t=\alpha\,\vec\imath+\beta\,\vec\jmath$).

3. $F$ est la courbe d'équation polaire $r=f(\theta)$. $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}=r'\,\vec u+r\,\vec u'$, $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}\right\|=\sqrt{r^2+r'2}$. On pose $\psi=\left(\widehat{\vec u(\theta),\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}}\right)$. Alors $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}=\left\|\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}\right\|(\cos\psi\,\vec u+\sin\psi\,\vec u')$, soit
$$\cos\psi=\frac{r'}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}},\ \sin\psi=\frac{r}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}}.\qquad(7)$$
Ceci permet, dans les cas favorables, d'obtenir $\psi$ comme fonction de $\theta$. Or $\varphi=(\widehat{\vec\imath,\vec t})=\left(\widehat{\vec\imath,\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}}\right)=(\widehat{\vec\imath,\vec u(\theta)})+\left(\widehat{\vec u(\theta),\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}}\right)$ donc : $\varphi=\theta+\psi$. On obtient ainsi $\varphi$ comme fonction de $\theta$ d'où $\rho=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}$, $R=\frac{1}{\rho}$, $I=M+R\,\vec n$ (avec $\vec n=\vec u(\varphi+\frac{\pi}{2})=\vec u(\theta+\psi+\frac{\pi}{2})$).

## 4.4 Développée d'une courbe plane

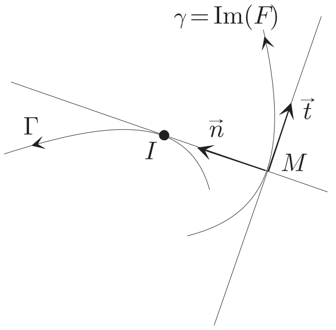
$F$ est un arc paramétré $\mathcal{C}^k$ (avec $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ et $k\geq 3$) sans point d'inflexion géométrique. On oriente $F$ dans le sens des $t$ croissants et on utilise toutes les notations précédentes.

*Le centre de courbure en $M$ est $I=M+R\vec n$.* Le point $I$ est une fonction de l'abscisse curviligne $s$ et du paramètre $t$. Or les fonctions $t\mapsto M$, $t\mapsto\vec n$ et $t\mapsto R=\frac{1}{\rho}$ sont respectivement de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^{k-1}$ et $\mathcal{C}^{k-2}$ (car $\rho=\mathrm{Det}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}^2\vec{M}}{\mathrm{d}s^2}\right)$) donc : la fonction $t\mapsto I=M+R\,\vec n$ est de classe $\mathcal{C}^{k-2}$.

Lorsque $t$ (ou $s$) varie, le point $I$ décrit une courbe qui est par définition la *développée* $\Gamma$ de l'arc $\gamma=\mathrm{Im}\,(F)$. C'est l'ensemble des centres de courbure en tous les points de $F$. Cette développée est paramétrée à l'aide du paramètre $t$ ou de l'abscisse curviligne $s$ (puisqu'on passe de $t$ à $s$ par un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme).

On a $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}+R\,\vec n$ donc
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec I}{\mathrm{d}s}&=\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}s}+R\,\frac{\mathrm{d}\vec n}{\mathrm{d}s}+\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\,\vec n=\vec t+\underbrace{R\,(-\rho)}_{=-1}\vec t+\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\,\vec n\\&=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\,\vec n\end{aligned}$$

Ainsi, en général : *la tangente à la développée* $\Gamma$ *en* $I$ *est la normale à la courbe* $\gamma$ *en* $M$.




**Remarque 3** *Si l'on s'intéresse uniquement à la développée, il n'est pas nécessaire de calculer tous les éléments métriques pour en obtenir un paramétrage. Puisque* $\vec{t} = \cos\varphi\,\vec{\imath} + \sin\varphi\,\vec{\jmath} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\vec{\jmath}$, $\vec{n} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\vec{\jmath}$ *et* $R = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}$ *donc* $R\vec{n} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\,\vec{\jmath}$ *et enfin* $I = M + R\vec{n} = O + X\,\vec{\imath} + Y\,\vec{\jmath}$ *où :*

$$\begin{cases} X = x - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} \\ Y = y + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} \end{cases}$$

## 4.5 Exemples de constructions de développées

1. Chaînette $y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$.

   $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x} = \mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$. $\vec{t} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}}\left(\vec{\imath} + \mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\,\vec{\jmath}\right)$ ; $\vec{n} = \frac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}}\left(-\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\,\vec{\imath} + \vec{\jmath}\right)$. La courbure est $\rho = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{a}\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}}{\mathrm{ch}^3\,\frac{x}{a}} = \frac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}}$ ; le rayon de courbure est $R = a\,\mathrm{ch}^2\,\frac{x}{a}$. $R\vec{n} = -a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}\,\vec{\imath} + a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,\vec{\jmath}$. Le centre de courbure est $I = M + R\vec{n} = O + X\,\vec{\imath} + Y\,\vec{\jmath}$ où :

   $$\begin{cases} X = x - a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} \\ Y = 2a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a} \end{cases}$$

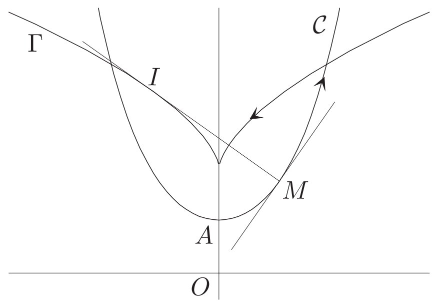
   $X$ est impaire et $Y$ est paire donc la développée $\Gamma$ est symétrique par rapport à $Oy$ (comme $\mathcal{C}$). On étudie sur $\mathbb{R}_+$.

   $X'(x) = 1 - \mathrm{ch}\,\frac{2x}{a} \leq 0$ ; $Y'(x) = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{x}{a}\right) \geq 0$

   | $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
   |---|---|---|---|
   | $X'(x)$ | | $<0$ | |
   | $X$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
   | $Y'(x)$ | | $>0$ | |
   | $Y$ | $2a$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

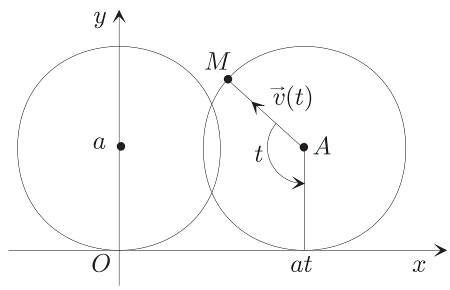
   Point stationnaire pour $x = 0$. $X''(x) = -\frac{2}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{2x}{a} = 0$ en 0, $Y''(x) = \frac{2}{a}\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right) \neq 0$ en 0 donc c'est un rebroussement ("$p = 2$"), compte tenu de la symétrie il ne peut être que de 1ère espèce.

   Branche infinie pour $x \to +\infty$ : $\frac{X}{Y} = \frac{x - a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}}{2a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}} \sim_{+\infty} -\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a} \to -\infty$ $[x \to +\infty]$, donc branche parabolique de direction $Ox$.

2. Cycloïde.

   La cycloïde $\gamma$ est "le lieu d'un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite". Soient les points comme sur le schéma :

   On a $M = F(t) = A + a\,\vec{v}(t) = O + at\,\vec{\imath} + a\,\vec{\jmath} + a\,\vec{v}(t)$ avec $\left(\widehat{\vec{v}(t), -\vec{\jmath}}\right) = t$ d'où $\left(\widehat{\vec{\imath}, \vec{v}(t)}\right) = \left(\widehat{\vec{\imath}, -\vec{\jmath}}\right) + \left(\widehat{-\vec{\jmath}, \vec{v}(t)}\right) = -\frac{\pi}{2} - t$ donc $\vec{v}(t) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} - t\right)\,\vec{\imath} + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - t\right)\,\vec{\jmath} = -\sin t\,\vec{\imath} - \cos t\,\vec{\jmath}$.
   Un paramétrage de $\gamma$ est donc :

   $$F(t) : \begin{cases} X = at - a\sin t \\ Y = a \ - a\cos t \end{cases}$$

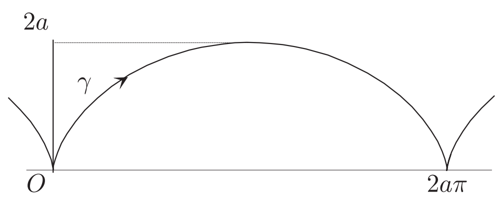
   $y$ est $2\pi$-périodique et $x(t + 2\pi) = x(t) + 2\pi a$ donc $F(t + 2\pi) = t_{2\pi a\vec{\imath}}(F(t))$ : on construit l'image d'un segment de longueur $2\pi$ et on lui applique des translations de vecteurs $2k\pi a\vec{\imath}$, $k \in \mathbb{Z}$.

   $x$ est impaire et $y$ est paire : on construit l'image de $[0, \pi]$ et on applique une symétrie par rapport à $Oy$.

   $x'(t) = a(1 - \cos t) \geq 0$ ; $y'(t) = a\sin t \geq 0$.

   | $t$ | $0$ | | $\pi$ |
   |---|---|---|---|
   | $x'(t)$ | $0$ | $>0$ | |
   | $x$ | $0$ | $\nearrow$ | $a\pi$ |
   | $y'(t)$ | $0$ | $>0$ | |
   | $y$ | $0$ | $\nearrow$ | $2a$ |

   Point stationnaire pour $t = 0$ : $\vec{F}''(t) = a\sin t\,\vec{\imath} + a\cos t\,\vec{\jmath} = a\,\vec{\jmath}$ en 0 donc ("$p = 2$") c'est un rebroussement, qui est de première espèce à cause de la symétrie par rapport à $Oy$. D'où le tracé :

Écrivons le vecteur dérivé

$$\begin{aligned}\vec{F}'(t) &= a(1-\cos t)\,\vec{\imath} + a\sin t\,\vec{\jmath} \\ &= 2a\sin\tfrac{t}{2}\left(\sin\tfrac{t}{2}\,\vec{\imath} + \cos\tfrac{t}{2}\,\vec{\jmath}\right)\end{aligned}$$

d'où :

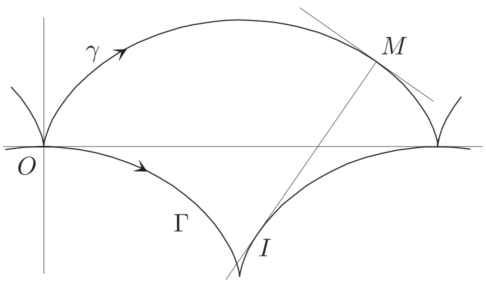
- $\left\|\vec{F}'(t)\right\| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right| = +2a\sin\frac{t}{2}$ si l'on s'intéresse à la développée de l'image de $[0,2\pi]$ ;
- $\vec{t} = \frac{1}{\left\|\vec{F}'(t)\right\|}\vec{F}'(t) = \sin\frac{t}{2}\,\vec{\imath} + \cos\frac{t}{2}\,\vec{\jmath} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)\vec{\imath} + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)\vec{\jmath}$ d'où p. ex. $\varphi = \frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$. On en déduit $\rho = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2a\sin\frac{t}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $R = \frac{1}{\rho} = -4a\sin\frac{t}{2}$. D'autre part $\vec{n} = -\cos\frac{t}{2}\,\vec{\imath} + \sin\frac{t}{2}\,\vec{\jmath}$ ; $R\vec{n} = 4a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\,\vec{\imath} - 4a\sin^2\frac{t}{2}\,\vec{\jmath} = 2a\sin t\,\vec{\imath} - 2a(1-\cos t)\,\vec{\jmath}$ et enfin $I = M + R\vec{n} = O + X\,\vec{\imath} + Y\,\vec{\jmath}$ où

$$\begin{aligned}X &= a(t+\sin t) = a(t-\sin(t-\pi)) \\ &= a(t-\pi-\sin(t-\pi)) + a\pi\ ; \\ Y &= -a(1-\cos t) = -a - a\cos(t-\pi) \\ &= a(1-\cos(t-\pi)) - 2a\end{aligned}$$

ce qui peut se résumer par

$$I(t) = t_{a\pi\,\vec{\imath}-2a\,\vec{\jmath}}(F(t-\pi))$$

donc pour obtenir la développée de l'image de $[0,2\pi]$ on part de l'image de $[-\pi,\pi]$ et on lui applique une translation de vecteur $a\pi\,\vec{\imath} - 2a\,\vec{\jmath}$. En particulier, *la cycloïde est isométrique à sa développée.*




3. Cardioïde $r = a(1+\cos\theta)$.
On a déjà calculé pour $\theta\in[-\pi,\pi]$ : $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} = 2a\cos\frac{\theta}{2}$. Il s'ensuit

$$\begin{aligned}\vec{t} &= \frac{1}{||\vec{F}'(\theta)||}\vec{F}'(\theta) = \frac{1}{2a\cos\frac{\theta}{2}}\left(r'\,\vec{u}(\theta) + r\,\vec{u}'(\theta)\right) \\ &= -\sin\tfrac{\theta}{2}\,\vec{u} + \cos\tfrac{\theta}{2}\,\vec{u}'\end{aligned}$$

d'où p. ex. $\psi = \frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}$ et $\varphi = \theta+\psi = \frac{3\theta}{2}+\frac{\pi}{2}$. On en déduit $\rho = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{2a\cos\frac{\theta}{2}}\left(\frac{3}{2}\right)$ et $R = \frac{1}{\rho} = \frac{4a}{3}\cos\frac{\theta}{2}$. Par ailleurs, $\vec{n} = -\cos\frac{\theta}{2}\,\vec{u} - \sin\frac{\theta}{2}\,\vec{u}'$, d'où :

$$\begin{aligned}R\vec{n} &= -\tfrac{4a}{3}\cos^2\tfrac{\theta}{2}\,\vec{u} - \tfrac{4a}{3}\sin\tfrac{\theta}{2}\cos\tfrac{\theta}{2}\,\vec{u}' \\ &= -\tfrac{2a}{3}(1+\cos\theta)\,\vec{u} - \tfrac{2a}{3}\sin\theta\,\vec{u}'\end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned}I &= M + R\vec{n} = O + a(1+\cos\theta)\,\vec{u} \\ &\quad -\frac{2a}{3}(1+\cos\theta)\,\vec{u} - \frac{2a}{3}\sin\theta\,\vec{u}' \\ &= O + \frac{a}{3}(1+\cos\theta)\,\vec{u} - \frac{2a}{3}\sin\theta\,\vec{u}'.\end{aligned}$$

Maintenant, pour reconnaître une transformation géométrique simple faisant passer de la cycloïde à sa développée, il faudrait une équation polaire de cette dernière. Mais comme le repère où cette équation polaire devient visible n'est peut-être pas celui d'origine, un détour par les coordonnées cartésiennes est inévitable. Ecrivons donc $I = M + R\vec{n} = O + X\,\vec{\imath} + Y\,\vec{\jmath}$ où

$$\begin{aligned}X &= \frac{a}{3}(1+\cos\theta)\cos\theta + \frac{2a}{3}\sin^2\theta \\ &= \frac{a}{3}\left(\cos\theta - \cos^2\theta + 2\right) \\ Y &= \frac{a}{3}(1+\cos\theta)\sin\theta - \frac{2a}{3}\sin\theta\cos\theta \\ &= \frac{a}{3}(\sin\theta - \sin\theta\cos\theta).\end{aligned}$$

Il y a un point stationnaire pour $\theta = 0$, ce qui correspond au point $\Omega = \left(\frac{2a}{3},0\right)$. Plaçons l'origine d'un nouveau repère en $\Omega$ : dans le repère $\mathcal{R}' = (\Omega,(\vec{\imath},\vec{\jmath}))$, le paramétrage de la développée $\Gamma$ devient :

$$\begin{aligned}X' &= \frac{a}{3}\cos\theta(1-\cos\theta) \\ Y' &= \frac{a}{3}\sin\theta(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

Dans le nouveau repère $\mathcal{R}_1 = (\Omega,(-\vec{\imath},-\vec{\jmath}))$ ce paramétrage devient :

$$\begin{aligned}X_1 &= -\frac{a}{3}\cos\theta(1-\cos\theta) \\ Y_1 &= -\frac{a}{3}\cos\theta(1-\cos\theta)\end{aligned}$$

soit finalement en posant $\theta_1 = \theta - \pi$ :

$$\begin{aligned}X_1 &= \frac{a}{3}\cos\theta_1(1+\cos\theta_1) \\ Y_1 &= \frac{a}{3}\sin\theta_1(1+\cos\theta_1)\end{aligned}$$

ce qui correspond à l'équation polaire :

$$r_1 = \frac{a}{3}(1+\cos\theta_1).$$

Ainsi, *la développée d'une cardioïde est une autre cardioïde.*
Plus précisément, pour développer l'image de $[0,\pi]$ (p. ex.) il faut considérer l'image de $[-\pi,0]$ et lui appliquer une translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega} = \frac{2a}{3}\,\vec{\imath}$ suivie d'une homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $-\frac{1}{3}$.