PCSI - mathématiques

Intégrale multiple

1 Généralités

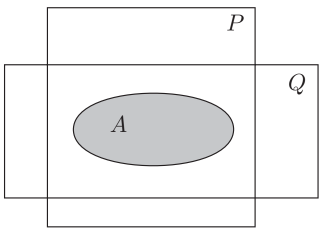
L'extension à $\mathbb{R}^n$ de l'intégrale est basée sur la notion de *pavé fermé* :

Définition 1 *Un* pavé fermé *de $\mathbb{R}^n$ est un produit de segments*

$$P = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] .$$

On étend ensuite la notion de subdivision (on subdivise chacun des segments), puis celle de fonction en escalier, intégrable, et l'intégrale de RIEMANN (sur un pavé fermé).

Pour l'intégrale sur une partie (bornée) quelconque A, on procède ainsi. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et soient P et Q des pavés fermés contenant A :



On définit $f_P : \left| \begin{array}{l} P \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \text{ si } x\in A \\ x \mapsto 0 \text{ si } x\in P-A \end{array}\right.$ et f_Q de même en remplaçant P par Q. On montre que f_P est intégrable sur P *ssi* f_Q est intégrable sur Q, auquel cas $\int_P f_P = \int_Q f_Q$. Cette valeur commune est l'intégrale de f sur A, notée $\int_A f$.

A est *mesurable* si la fonction caractéristique de A, $\chi_A : A \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \chi_A(x) = 1$ est intégrable sur A. La *mesure* ou *volume*[1] de A est alors $\operatorname{mes}(A) = \operatorname{vol}(A) = \int_A \chi_A$.

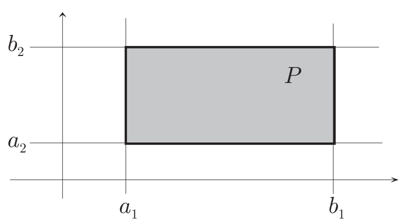
Enfin on retrouve les propriétés fondamentales de l'intégrale : linéarité, positivité, additivité par rapport au domaine d'intégration.

2 Intégrales doubles

Commençons par le type de domaine le plus simple :

2.1 Intégrale sur un pavé fermé

Soit $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un pavé fermé de $\mathbb{R}^2$:



Le th. de FUBINI en dimension 2 s'énonce ainsi :

[1] Le terme d'*aire* est réservé à la dimension 2.

Théorème 1 (Fubini) *Si $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ est un pavé fermé de $\mathbb{R}^2$, et si $f : P \to \mathbb{R}$ est continue sur P, alors f est intégrable sur P et :*

$$\begin{aligned} \int_P f &= \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_2 \right] \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_1 \right] \mathrm{d}x_2 \end{aligned}$$

On se ramène donc à deux intégrales simples, qui peuvent être calculées dans un ordre quelconque[2].

Remarque 1 *Si $f(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2)$, l'intégrale double se décompose directement comme produit de deux intégrales simples : $\int_P f = \int_{a_1}^{b_1} f_1 \int_{a_2}^{b_2} f_2$.*

Exemple 1 *$a > 0$, $P = [0, a] \times [0, a]$; calculer l'intégrale double $I = \int_P y\, \mathrm{e}^{-xy}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.*

2.2 Intégrale sur un domaine quelconque

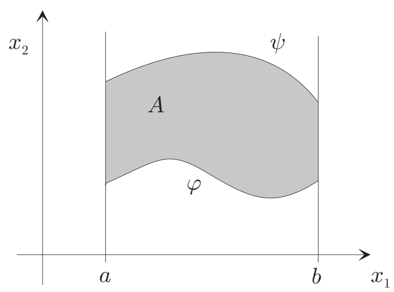
On se contentera d'envisager certains cas particuliers où le domaine revêt une forme bien précise.

2.2.1 Sommation "par piles"

Soient φ, $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues ; et soit

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [a, b] \text{ et } \varphi(x_1) \leq x_2 \leq \psi(x_1)\} .$$

On intègre donc sur un domaine du type ci-dessous :



Dans ces conditions, on a le

Théorème 2 ("sommation par piles")

1. *A est mesurable et* $\operatorname{mes}(A) = \int_a^b (\psi(x_1) - \varphi(x_1))\, \mathrm{d}x_1$ *;*
2. *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue sur A, f est intégrable sur A et :*

$$\int_A f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x_1)}^{\psi(x_1)} f(x_1, x_2)\, \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 .$$

[2] Cela ne dispense pas, *en pratique*, de faire attention à l'ordre pour que le calcul soit le plus simple possible.

Notons que dans le cas particulier où les fonctions φ et ψ sont constantes, on retrouve le th. de Fubini.

Exemple 2 *Aire du domaine elliptique* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$.

2.2.2 Changement de variables

Ce théorème permet de transformer le domaine d'intégration et / ou de simplifier l'expression de la fonction à intégrer.

Définition 2 *Si* $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2)$ *où* $y_1 = f_1(x_1, x_2)$, $y_2 = f_2(x_1, x_2)$ *admet une différentielle en* $a \in U$, *le* jacobien *de* f *en* a *est*

$$J_f(a) = \det(\mathrm{d}f(a)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) \end{vmatrix}.$$

Notation 1 *On écrit également*

$$J_f(a) = \frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)}.$$

Théorème 3 (changement de variables) *Soient* U *et* V *des ouverts de* $\mathbb{R}^2$. *Soit* $\varphi : U \to V$ *est une application* $\mathcal{C}^1$ *sur* U. *Soit* $A \subset U$ *une partie mesurable telle que* $\varphi\langle A\rangle \subset V$ *soit mesurable et que l'ensemble des points de* $\varphi\langle A\rangle$ *ayant plusieurs antécédents par* φ *soit de mesure nulle. Soit* $f : \varphi\langle A\rangle \to \mathbb{R}$ *est intégrable sur* $\varphi\langle A\rangle$. *Alors* $f \circ \varphi : A \to \mathbb{R}$ *est intégrable sur* A *et*

$$\int_{\varphi\langle A\rangle} f = \int_A (f \circ \varphi)\,|J_\varphi|\,.$$

En d'autres termes, si φ est définie par $\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1,x_2) \\ y_2 = \varphi_2(x_1,x_2) \end{cases}$:

$$\int_{\varphi\langle A\rangle} f(y_1, y_2)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 = \int_A f^*(x_1, x_2)\left|\frac{D(y_1, y_2)}{D(x_1, x_2)}\right|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

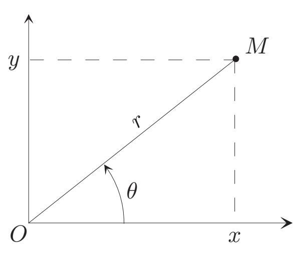
en notant

$$f^*(x_1, x_2) = f \circ \varphi(x_1, x_2) = f(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)).$$

2.2.2.1 Coordonnées polaires

Le passage en coordonnées polaires dans le plan se traduit par l'application

$$\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \binom{r}{\theta} & \mapsto & \binom{r\cos\theta}{r\sin\theta} \end{array}\right.$$



φ est $\mathcal{C}^\infty$. On peut toujours supposer que sur le domaine A étudié est inclus dans $\mathcal{D} : \begin{cases} r \geq 0 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Alors, les points de $\varphi\langle A\rangle$ ayant plusieurs antécédents par φ seront situés sur le demi-axe Ox, donc formeront toujours une partie de $\varphi\langle A\rangle$ d'aire nulle. Le jacobien de φ est

$$J_\varphi(r, \theta) = \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Par suite, si $A \subset \mathcal{D}$ est mesurable ainsi que $\varphi\langle A\rangle$ et si $f : \varphi\langle A\rangle \to \mathbb{R}$ est une application intégrable sur $\varphi\langle A\rangle$, $f \circ \varphi$ est intégrable sur A et $\int_{\varphi\langle A\rangle} f = \int_A (f \circ \varphi)\,|J_\varphi|$ soit

$$\int_{\varphi\langle A\rangle} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_A f^*(r, \theta)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

avec

- $f^*(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = f \circ \varphi(r, \theta)$;
- $\varphi\langle A\rangle$: domaine "en cartésiennes" ;
- A : domaine "en polaires".

Exemple 3 *Calculer l'intégrale* $I = \int_{\mathcal{D}} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ *où* $\mathcal{D}$ *est le domaine défini par les inégalités :* $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2y \end{cases}$.

2.2.2.2 Changement de variable affine

Voir l'énoncé de ce résultat en dimension 3 (§ 3.2.3.3).

2.3 Formule de Green-Riemann

La formule de Green-Riemann permet de transformer une intégrale double sur un domaine A en une intégrale simple ("curviligne") étendue au "bord" ∂A (supposé $\mathcal{C}^1$) de A :

Théorème 4 (Green-Riemann) *Si* P *et* Q *sont* $\mathcal{C}^1$ *au voisinage de* A,

$$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial A} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

où l'intégrale ("curviligne") du membre de droite se définit comme

$$\int_a^b \left[P(x(t))\,x'(t) + Q(y(t))\,y'(t)\right]\mathrm{d}t$$

où $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$; $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ est un paramétrage[3] ($\mathcal{C}^1$) de l'arc ∂A.

2.3.1 Application aux calculs d'aires

On peut utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la portion de plan A : il suffit de choisir convenablement P et Q pour avoir au premier membre l'*élément d'aire* (le "$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$") du plan.

2.3.1.1 Coordonnées cartésiennes

On doit avoir $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$. Il y a donc plusieurs possibilités, notamment $P = -\frac{y}{2}$, $Q = \frac{x}{2}$:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial A} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

cette expression est intéressante lorsqu'il s'agit de tirer parti des symétries éventuelles de A, *cf.* l'exemple suivant :

Exemple 4 *Aire du domaine délimité par l'astroïde* $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

[3] On vérifie que cette définition est indépendante du paramétrage, *cf.* le chapitre "opérateurs différentiels", § "circulation".

2.3.1.2 Coordonnées polaires

On peut aussi envisager le cas des coordonnées polaires. Supposons que ∂A soit paramétré par θ. On calcule avec $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$: $\mathrm{d}x = -r\sin\theta\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}y = r\cos\mathrm{d}\theta$ et $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial A} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial A} r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$ soit

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial A} r^2\,\mathrm{d}\theta$$

(formule de Green-Riemann en polaires).

Exemple 5 *Aire du domaine délimité par la cardioïde $r = a(1+\cos\theta)$.*

3 Intégrales triples

3.1 Intégrale sur un pavé fermé

Le th. 1 se généralise aisément aux dimensions supérieures :

Théorème 5 (Fubini) *Si $P = [a_1, b_1]\times[a_2, b_2]\times[a_3, b_3]$ est un pavé fermé de $\mathbb{R}^3$, et si $f : P \to \mathbb{R}$ est continue sur P, alors f est intégrable sur P et :*

$$\int_P f = \int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\int_{a_3}^{b_3} f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_3$$
$$= \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}}\mathrm{d}x_{i_1}\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}}\mathrm{d}x_{i_2}\int_{a_{i_3}}^{b_{i_3}} f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_{i_3}$$

pour toute bijection $\sigma : k \mapsto i_k$ de $[\![1, 3]\!]$.

3.2 Intégrale sur un domaine quelconque

Le th. 2 se subdivise en deux variantes :

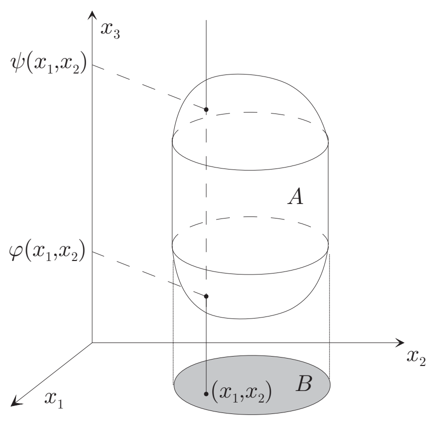
3.2.1 Sommation "par piles"

Soit B est une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$. $\varphi, \psi : B \to \mathbb{R}$ sont continues sur B et $\forall(x_1, x_2) \in B$, $\varphi(x_1, x_2) \le \psi(x_1, x_2)$.

On suppose que le domaine A est de la forme suivante :

$$\begin{aligned} A \;=\; & \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in B \\ & \text{et } \varphi(x_1, x_2) \le x_3 \le \psi(x_1, x_2)\}. \end{aligned}$$

Cette définition est illustrée par le schéma suivant :



On obtient la généralisation du th. 2 :

Théorème 6 (sommation "par piles")

1. *A est mesurable et*
$$\mathrm{mes}(A) = \int_B ((\psi-\varphi)(x_1, x_2))\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\;;$$
2. *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue sur A, f est intégrable sur A et :*
$$\int_A f = \int_B \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\int_{\varphi(x_1,x_2)}^{\psi(x_1,x_2)} f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_3.$$

(Au lieu de privilégier la variable x_3, on aurait le même théorème en remplaçant x_3 par x_1 ou x_2.)

Exemple 6 *Calculer le volume du "coin" de $\mathbb{R}^3$: $A = \{(x, y, z) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1\}$, ainsi que $I = \int_A \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.*

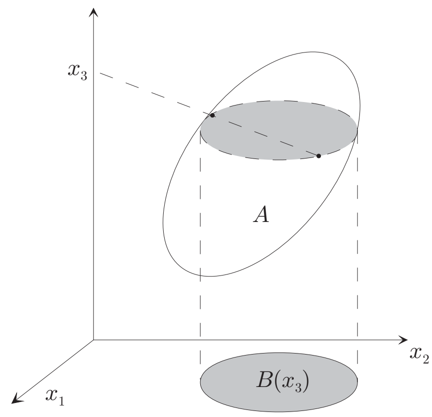
3.2.2 Sommation "par tranches"

Soit maintenant A est une partie bornée de $\mathbb{R}^3$. On a donc, si $x = (x_1, x_2, x_3) \in A$: $a \le x_3 \le b$.

Pour $x_3 \in [a, b]$ on définit la "tranche" de cote x_3 :

$$B(x_3) = \{(x_1, x_2) \mid (x_1, x_2, x_3) \in A\}.$$

Cela peut se schématiser ainsi :



On suppose de plus que pour tout $x_3 \in [a, b]$, $B(x_3)$ est mesurable dans $\mathbb{R}^2$ et que l'application $x_3 \mapsto \mathrm{mes}(B(x_3))$ est continue sur $[a, b]$.

Alors on peut énoncer :

Théorème 7 (sommation "par tranches")

1. *A est mesurable dans $\mathbb{R}^3$ et*
$$\mathrm{mes}(A) = \int_a^b \mathrm{mes}(B(x_3))\,\mathrm{d}x_3\;;$$
2. *Si $f : A \to \mathbb{R}$ est continue sur A, f est intégrable sur A et :*
$$\int_A f = \int_a^b \mathrm{d}x_3\int_{B(x_3)} f(x_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2.$$

Là encore, ce n'est pas forcément la troisième coordonnée qui joue un rôle particulier.

Exemple 7 *Volume d'une la pyramide de base d'aire $\mathcal{A}$ et de hauteur h.*

3.2.3 Changement de variables

La définition 2. se généralise naturellement. La notation 1. devient

Notation 2 *Le jacobien de* $f:\left|\begin{array}{ccc}U\subset\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ (x_1,x_2,x_3) & \mapsto & (y_1,y_2,y_3)\end{array}\right.$ *en* $a\in U$ *est noté*

$$J_f(a)=\frac{D(y_1,y_2,y_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}.$$

Le th. 3. s'étend de même. Son énoncé développé s'écrit, si φ est définie par les relations $\left\{\begin{array}{l}y_1=\varphi_1(x_1,x_2,x_3)\\ y_2=\varphi_2(x_1,x_2,x_3)\\ y_3=\varphi_3(x_1,x_2,x_3)\end{array}\right.$:

$$\int_{\varphi\langle A\rangle} f(y_1,y_2,y_3)\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3= \int_A f^*(x_1,x_2,x_3)\left|\frac{D(y_1,y_2,y_3)}{D(x_1,x_2,x_3)}\right|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

en notant

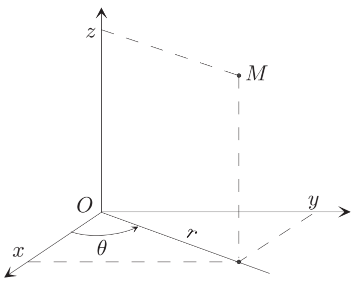
$$\begin{array}{rcl}f^*(x_1,x_2,x_3)&=&f\circ\varphi(x_1,x_2,x_3)\\ &=&f(y_1(x_1,x_2,x_3),y_2(...),y_3(...)).\end{array}$$

3.2.3.1 Coordonnées cylindriques

Le passage en coordonnées cylindriques dans l'espace se traduit par l'application

$$\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}r\\ \theta\\ z\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}r\cos\theta\\ r\sin\theta\\ z\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

très similaire à celle des coordonnées polaires dans le plan.



φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut supposer $A\subset\mathcal{D}:\left\{\begin{array}{l}r\geq0\\ 0\leq\theta\leq2\pi\end{array}\right.$. Ainsi, les points de $\varphi\langle A\rangle$ ayant plus d'un antécédent sont situés sur xOz et forment toujours une partie de $\varphi\langle A\rangle$ de volume nul. On calcule le jacobien de φ en (r,θ,z) :

$$J_\varphi(r,\theta,z)=\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)}=\left|\begin{array}{ccc}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right|=r.$$

Par suite, si $A\subset\mathcal{D}$ et $\varphi\langle A\rangle$ sont mesurables et si l'application $f:\varphi\langle A\rangle\to\mathbb{R}$ est intégrable sur $\varphi\langle A\rangle$, $f\circ\varphi$ est intégrable sur A et $\int_{\varphi\langle A\rangle}f=\int_A(f\circ\varphi)\,|J_\varphi|$ soit

$$\int_{\varphi\langle A\rangle}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_A f^*(r,\theta,z)\;r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

avec

- $f^*(r,\theta,z)=f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)=f\circ\varphi(r,\theta,z)$;
- $\varphi\langle A\rangle$: domaine "en cartésiennes" ;
- A : domaine "en cylindriques".

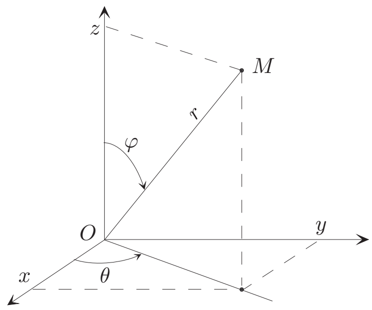
Exemple 8 *Volume de la fenêtre de* VIVIANI *(intersection d'une boule* $\mathcal{B}$ *de rayon* a *et d'un cylindre* $\mathcal{C}$ *de rayon* $\frac{a}{2}$ *tangent intérieurement à* $\mathcal{B}$*).*

3.2.3.2 Coordonnées sphériques

Le passage en coordonnées sphériques dans l'espace se traduit par l'application

$$\psi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3\\ \begin{pmatrix}r\\ \theta\\ \varphi\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}r\cos\theta\sin\varphi\\ r\sin\theta\sin\varphi\\ r\cos\varphi\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Attention, ce n'est pas le "r" des coordonnées cylindriques :



ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On peut supposer $A\subset\mathcal{D}:\left\{\begin{array}{l}r\geq0\\ 0\leq\theta\leq2\pi\\ 0\leq\varphi\leq\pi\end{array}\right.$. Ainsi, les points de $\psi\langle A\rangle$ qui ont plusieurs antécédents, situés sur xOz, constitueront toujours une partie de $\psi\langle A\rangle$ de volume nul. On calcule le jacobien de ψ en (r,θ,φ) :

$$\begin{array}{rcl}J_\psi(r,\theta,\varphi)&=&\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)}\\ &=&\left|\begin{array}{ccc}\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi\end{array}\right|\\ &=&-r^2\sin\varphi\end{array}$$

Par suite, si $A\subset\mathcal{D}$ et $\psi\langle A\rangle$ sont mesurables et si l'application $f:\psi\langle A\rangle\to\mathbb{R}$ est intégrable sur $\psi\langle A\rangle$, $f\circ\psi$ est intégrable sur A et $\int_{\psi\langle A\rangle}f=\int_A(f\circ\psi)\,|J_\psi|$ soit

$$\int_{\psi\langle A\rangle}f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_A f^*(r,\theta,\varphi)\;r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

avec

- $f^*(r,\theta,\varphi)=f(r\cos\theta\sin\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\varphi)$
  $=f\circ\psi(r,\theta,\varphi)$;
- $\psi\langle A\rangle$: domaine "en cartésiennes" ;
- A : domaine "en sphériques".

Exemple 9 *Volume d'une boule de rayon* a*.*

3.2.3.3 Changement de variables affine

On considère une application affine bijective

$$\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\;;\;X\mapsto\ell(X)+B$$

(où $\ell=L(\varphi)$: partie linéaire de φ). φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et pour tout $X\in\mathbb{R}^3$, $\mathrm{d}\varphi(X)=\ell$. Par suite, $J_\varphi(X)=\det\ell$ (constant) et si A est une partie mesurable de $\mathbb{R}^3$, si $f:\varphi\langle A\rangle\to\mathbb{R}$ est intégrable sur $\varphi\langle A\rangle$, $f\circ\varphi$ est intégrable sur A et :

$$\int_{\varphi\langle A\rangle}f=|\det\ell|\int_A f\circ\varphi.$$

En particulier, si f est constante en 1 :

$$\mathrm{mes}(\varphi\langle A\rangle)=|\det\ell|\,\mathrm{mes}(A).$$

Exemple 10

- *Volume du domaine ellipsoïdal* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq1$ *;*
- *Volume du parallélotope construit sur trois vecteurs* u*,* v *et* w *:* $P=\{\alpha u+\beta v+\gamma w\mid\alpha,\,\beta,\,\gamma\in[0,1]\}$.