Intégrale de Riemann

1 Fonctions en escalier

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.

1.1 Subdivisions de $[a, b]$

Définition 1 *Une* subdivision *du segment* $[a, b]$ *est une famille finie* $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *telle que*

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b.$$

L'entier n n'est pas fixé ; il vaut au moins 1 (la subdivision comportant au moins deux points : a et b).

Définition 2 *Le* pas *ou* module *de* $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *est le plus grand des écarts entre deux points consécutifs de la subdivision :*

$$|d| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

L'exemple suivant montre que $|d|$ peut être rendu arbitrairement petit :

Exemple 1 *La subdivision "de pas constant"* d_n *est définie pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $d_n = (x_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$ *où*

$$x_{n,i} = a + i \ \frac{b-a}{n} \ (0 \leq i \leq n).$$

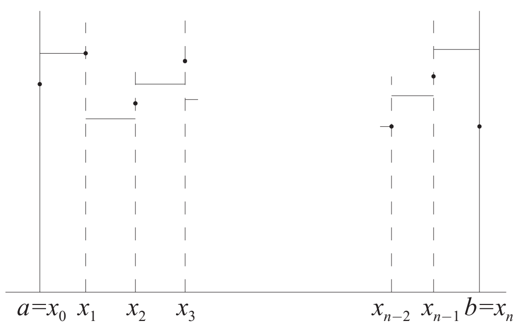
Le pas de la subdivision d_n est bien sûr égal à $\frac{b-a}{n}$.

Définition 3 *La subdivision* $d' = (y_i)_{0 \leq i \leq p}$ *est* plus fine *que* $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *si* $\{x_0, \ ..., \ x_n\} \subset \{y_0, \ ..., \ y_p\}$.

Lemme 1 *Si* d *et* d' *sont deux subdivisions de* $[a, b]$*, il existe une subdivision* d'' *de* $[a, b]$ *plus fine que* d et d'.

1.2 Fonctions en escalier sur $[a, b]$

Définition 4 *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est* en escalier *sur* $[a, b]$ *s'il existe une subdivision* $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ *de* $[a, b]$ *telle que pour tout* $i \in [\![0, n-1]\!]$*,* f *soit constante sur* $]x_i, x_{i+1}[$.



La subdivision d n'est pas fixée (n non plus), elle dépend de f. d est dite subdivision *adaptée* (ou *subordonnée*) à f. On remarque que si d est une telle subdivision, et si d' est plus fine que d, alors d' est aussi une subdivision adaptée à f. Cette remarque se combine avec le lemme 1 pour donner

Lemme 2 *Si* f *et* g *sont deux fonctions en escalier sur* $[a, b]$*, il existe une subdivision* d *de* $[a, b]$ *adaptée à* f et *à* g.

Corollaire 1 *Si* f *et* g *sont en escalier sur* $[a, b]$*, il en est de même de* $\lambda f + \mu g$ *et* fg.

Notation 1 *On note* $\mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions en escalier de* $[a, b]$ *dans* $\mathbb{R}$.

Notons qu'une telle fonction ne prend qu'un nombre fini de valeurs, donc elle est nécessairement bornée sur $[a, b]$: $\mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$. Il résulte alors du corollaire 1 que

Proposition 1 $\mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ *est une* $\mathbb{R}$*-algèbre (sous-algèbre de* $\mathcal{B}([a, b], \mathbb{R})$*).*

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Soient $f \in \mathrm{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ et $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision adaptée à f. On note u_i la valeur constante de f sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$ et on pose :

$$I(f, d) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \ u_i$$

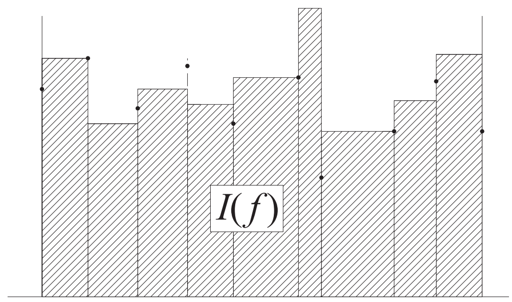
Lemme 3 *Le réel* $I(f, d)$ *est en fait* indépendant *de la subdivision* d *adaptée à* f.

Ce lemme permet de poser :

Définition 5 *L'*intégrale *de la fonction en escalier* f *sur* $[a, b]$ *est*

$$I(f) = I_{[a,b]}(f) = I(f, d)$$

où d *est une subdivision (quelconque) de* $[a, b]$ *adaptée à* f.



1.4 Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

Proposition 2 (linéarité) *Si f et g sont en escalier sur $[a,b]$,*

$$I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g).$$

Autrement dit, l'intégrale est linéaire de $\mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3 (positivité) *Si f est en escalier sur $[a,b]$ et si $f \geq 0$ alors $I(f) \geq 0$.*

Corollaire 2 (croissance) *Si f et g sont en escalier sur $[a,b]$ et si $f \leq g$ alors $I(f) \leq I(g)$.*

Mais l'obtention d'inégalités *strictes* vérifiées par des intégrales pose des problèmes.

Notation 2 $\|f\|_\infty = \sup_{[a,b]} |f|$ *pour toute fonction f bornée (en particulier, en escalier) sur $[a,b]$.*

On a alors le résultat suivant qui découle de l'inégalité triangulaire :

Proposition 4 *Si f est en escalier sur $[a,b]$, $|f|$ l'est également et*

$$|I(f)| \leq I(|f|) \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Enfin, dans le cas où l'on fait varier le segment d'intégration, on peut énoncer :

Proposition 5 *Si $a < b < c \in \mathbb{R}$ et si $f : [a,c] \to \mathbb{R}$, alors f est en escalier sur $[a,c]$* ssi *f est en escalier sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, auquel cas on a*

$$I_{[a,c]}(f) = I_{[a,b]}(f) + I_{[b,c]}(f).$$

Cette propriété se généralise aisément à un nombre quelconque de segments.

2 Fonctions intégrables

2.1 Intégrabilité et intégrale

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Définition 6 *f est* intégrable *sur $[a,b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ, $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ en escalier telles que*

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } I(\psi - \varphi) \leq \varepsilon.$$

Les fonctions en escalier vérifient cette définition (on peut prendre $\varphi = \psi = f$ pour tout ε). D'autre part, une fonction intégrable sur $[a,b]$ est encadrée par deux fonctions en escalier, donc bornées ; elle est donc elle-même nécessairement bornée.

Notation 3 *On désigne par* $\mathrm{Int}([a,b],\mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.*

On a donc $\mathrm{Int}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$.

Donnons une autre formulation de la définition 6.

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$. Notons qu'alors f est majorée et minorée par des fonctions constantes, donc en escalier, m et M.

Notons $E_-(f) = \{I(e) \mid e \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } e \leq f\}$ et $E_+(f) = \{I(e) \mid e \in \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } e \geq f\}$. $E_-(f)$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée (par $M(b-a)$) donc admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. De même, $E_+(f)$ admet une borne inférieure. On a évidemment $\sup(E_-(f)) \leq \inf(E_+(f))$. On constate alors que

Proposition 6 *f est intégrable sur $[a,b]$* ssi $\sup(E_-(f)) = \inf(E_+(f))$.

Définition 7 *Si f est intégrable sur $[a,b]$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est*

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup(E_-(f)) = \inf(E_+(f)).$$

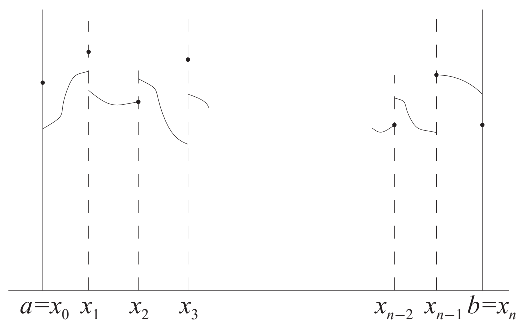
Comme les fonctions en escalier sont intégrables, il y a apparemment deux définitions de l'intégrale pour une telle fonction. On vérifie qu'elles coïncident : $\int_{[a,b]} f = I(f)$ pour f en escalier sur $[a,b]$.

2.2 Fonctions continues par morceaux

Les fonctions continues par morceaux constituent une classe importante de fonctions intégrables.

Définition 8 *f est* continue par morceaux *de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ s'il existe une subdivision $d = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a,b]$ telle que :*

- *f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$;*
- *f admet des limites finies à droite en x_0, ..., x_{n-1} ;*
- *f admet des limites finies à gauche en x_1, ..., x_n.*



Les fonctions continues ; les fonctions en escalier sont des cas particuliers de fonctions continues par morceaux. On peut d'autre part remarquer qu'une fonction continue par morceaux est bornée sur $[a,b]$: en effet (notations précédentes) elle est bornée sur $[x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ car elle est *prolongeable par continuité sur ce segment*. Ainsi en notant $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$: $\mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. Enfin il est facile de voir que si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b]$, il en est de même de $\lambda f + \mu g$ et fg.

On résume ainsi les propriétés algébriques des fonctions continues par morceaux :

Proposition 7 *$\mathcal{C}^0_{mx}([a,b],\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre (sous-algèbre de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$).*

Le résultat suivant (admis) fait le lien avec les fonctions intégrables :

Théorème 1 *Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions φ et ψ en escalier sur $[a,\ b]$ telles que :*

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

Corollaire 3 *Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, f est intégrable sur $[a,b]$.*

En particulier, *toute fonction continue sur $[a,b]$ est intégrable sur $[a,b]$*. Pour résumer les autres inclusions obtenues :

$$\begin{aligned} \mathrm{Esc}([a,b],\mathbb{R}) &\subset \mathcal{C}^0_{\mathrm{mx}}([a,b],\mathbb{R}) \\ &\subset \mathrm{Int}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}) \end{aligned}$$

2.3 Sommes de Riemann

On reprend pour $n \in \mathbb{N}^*$ la subdivision de pas constant $d_n = (x_{n,i})_{0 \leq i \leq n}$ avec $x_{n,i} = a + i\ \frac{b-a}{n}$ $(0 \leq i \leq n)$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Définition 9 *La* somme de Riemann *associée à f et à la subdivision d_n est*

$$\begin{aligned} S_n(f) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{n,i+1} - x_{n,i})\ f(x_{n,i}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{n,i}) \end{aligned}$$

Il apparaît que $S_n(f)$ est l'intégrale d'une fonction en escalier : $S_n(f) = I(e_n)$ où

$$\begin{cases} e_n(t) &= f(x_{n,i}) \text{ si } t \in]x_{n,i}, x_{n,i+1}[\ (0 \leq i \leq n-1), \\ e_n(t) &= f(t) \text{ si } t \in \{x_{n,0},\ \ldots,\ x_{n,n}\} \end{cases}$$

Dans le cas de fonctions intégrables, les sommes de Riemann fournissent un moyen d'estimer leur intégrale :

Théorème 2 *Si f est intégrable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$,*

$$\lim S_n(f) = \int_{[a,b]} f.$$

Exemple 2
- $f(x) = x$ *sur* $[0,b]$;
- $f(x) = x^2$ *sur* $[0,b]$.

Lorsqu'on dispose d'un autre moyen de calculer l'intégrale en question (p. ex. en faisant intervenir une primitive de f, *cf.* section 3.), le théorème 2 peut devenir un outil de calcul de limite pour certaines suites.

Exemple 3 *Déterminer* $\lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\cos^2 \frac{k\pi}{4n}}$.

2.4 Propriétés de l'intégrale

Il faut reprendre les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier afin de les généraliser aux fonctions intégrables quelconques.

Théorème 3 (linéarité) *Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$,*

$$\int_{[a,b]} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_{[a,b]} f + \mu \int_{[a,b]} g.$$

Cela signifie que l'intégrale est une opération linéaire de $\mathrm{Int}([a,b],\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 4 (positivité) *Si f est intégrable sur $[a,b]$ et si $f \geq 0$ alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.*

Corollaire 4 (croissance) *Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et si $f \leq g$ alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.*

On peut donner une version plus précise dans le cas des fonctions *continues* :

Proposition 8 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, ≥ 0, non identiquement nulle, alors : $\int_{[a,b]} f > 0$.*

On peut toujours comparer la valeur absolue de l'intégrale et l'intégrale de la valeur absolue :

Proposition 9 *Si f est intégrable sur $[a,b]$, $|f|$ l'est également et*

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f| \leq (b-a) \|f\|_\infty .$$

En remplaçant f par fg et en majorant $|f(t)\ g(t)| \leq \|f\|_\infty |g(t)|$ on obtient une généralisation appelée *inégalité de la moyenne* :

Proposition 10 *Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$,*

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \|f\|_\infty \int_{[a,b]} |g|$$

Plus précisément, supposons que la fonction intégrable (donc bornée) f soit comprise entre un minorant m et un majorant M. On intègre l'encadrement $m \leq f(t) \leq M$ sur $[a,b]$ pour obtenir $m(b-a) \leq \int_{[a,b]} f \leq M(b-a)$ ou encore $m \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leq M$.

Définition 10 *Le réel $\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]}$ est la* valeur moyenne *de f sur $[a,b]$.*

C'est la valeur d'une fonction constante dont l'intégrale sur $[a,b]$ est la même que celle de f.

Le théorème de fractionnement de l'intervalle d'intégration reste valable :

Proposition 11 *Si $a < b < c \in \mathbb{R}$ et si $f : [a,c] \to \mathbb{R}$, alors f est intégrable sur $[a,c]$* ssi *f est intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, auquel cas on a*

$$\int_{[a,c]} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,c]} f.$$

3 Primitives d'une fonction continue

On dit qu'une fonction f est *localement intégrable* sur un intervalle I (quelconque) de $\mathbb{R}$ si f est intégrable sur tout segment inclus dans I. C'est le cas, par exemple, si f est continue sur I.

3.1 Intégrale "de a à b"

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ localement intégrable sur l'intervalle I. Soient $a,\, b \in I$.

Définition 11 *L'intégrale "de a à b" de f est*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } b < a \end{cases}$$

Cette définition permet de s'affranchir de l'ordre entre a et b. Il en résulte immédiatement les conséquences suivantes :

1. $\int_a^b k\,\mathrm{d}x = k\,(b-a)$;
2. $\int_b^a f = -\int_a^b f$;
3. $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ ("relation de Chasles") ;
4. $\int_a^b f = \int_\omega^b f - \int_\omega^a f$;
5. $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f = \int_{a_0}^{a_n} f$.

3.2 Fonction $x \mapsto \int_\omega^x f$

f désigne toujours une fonction localement intégrable sur l'intervalle I. On fixe $\omega \in I$ et on définit :

$$F : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_\omega^x f \end{array}$$

Les propriétés de F dépendent de celles de f :

Proposition 12 *F est* continue *sur I.*

Proposition 13 *Si f est continue en $a \in I$, F est dérivable en a et $F'(a) = f(a)$.*

Corollaire 5 *Si f est continue sur I, F est dérivable sur I et : $F' = f$.*

3.3 Primitives d'une fonction continue

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.

Définition 12 *Une* primitive *de f sur I est une application $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I telle que $F' = f$.*

Le résultat suivant résume les propriétés des primitives des fonctions continues.

Théorème 5 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I.*

1. *f admet des primitives sur I.*
2. *Si F est une primitive de f sur I, les primitives de f sur I sont les $x \mapsto F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.*
3. *Pour toute primitive F de f sur I et pour tous $a,\, b \in I$, $\int_a^b f = F(b) - F(a) \overset{\text{déf.}}{=} [F]_a^b$.*
4. *Si $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f$ est la primitive de f qui s'annule en a.*

Les primitives des fonctions continues sont donc très utiles pour en calculer les intégrales. Mais la notion de primitive donne aussi accès à une famille importante de théorèmes.

3.4 Formules d'intégration par parties

Ces théorèmes servent davantage à *transformer* des intégrales qu'à les calculer.

Théorème 6 (formule d'I.P.P) *Soient $u,\, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si $a,\, b \in I$,*

$$\int_a^b u\ v' = [u\ v]_a^b - \int_a^b u'\ v$$

Exemple 4

1. $\int_a^b \ln(t)\ \mathrm{d}t$;
2. $\int_a^b t\ \mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t$;
3. $\varphi(\lambda) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\ \mathrm{d}t$ *admet pour limite* 0 *en* $\pm\infty$ *si* $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ *(lemme de* Lebesgue*).*

Théorème 7 (formule d'I.P.P.G) *Soient $u,\, v : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Si $a,\, b \in I$,*

$$\begin{aligned} \int_a^b u\, v^{(n+1)} &= \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\ u^{(i)}\ v^{(n-i)}\right]_a^b \\ &\quad + (-1)^{n+1} \int_a^b u^{(n+1)}\, v \end{aligned}$$

Exemple 5

1. $\int_a^b P(t)\ \mathrm{e}^{\alpha t}\ \mathrm{d}t$;
2. $\int_a^b P(t)\ \sin(t)\ \mathrm{d}t$;

On peut aussi prouver à l'aide d'une intégration par parties généralisée :

Théorème 8 (formule de Taylor - intégrale) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I. Si $a,\, b \in I$,*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{(b-a)^i}{i!}\, f^{(i)}(a) \\ &\quad + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

3.5 Formule de changement de variables

Théorème 9 *Soient $f : J \to \mathbb{R}$ continue sur J et $\varphi : I \to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si $a,\, b \in I$,*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Pratiquement on écrit $x=\varphi(t)$ puis $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)$ ce qu'on note "$\mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$" puis $f(x)=f(\varphi(t))$ et pour $t=a$, $x=\varphi(a)$, pour $t=b$, $x=\varphi(b)$.

- Si l'intégrale à calculer est de la forme $I=\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$: c'est $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si l'intégrale à calculer est $I=\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$, on cherche alors a et $b\in I$ tels que $\alpha=\varphi(a)$ et $\beta=\varphi(b)$. Alors $I=\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 6

1. $\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,\cos t\,\mathrm{d}t$;
2. $\int_0^a \frac{1}{h^2+t^2}\,\mathrm{d}t$;
3. $\int_0^a \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;
4. $\int_0^a \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;
5. $\int_0^a \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$;
6. $I_n=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^n\,\mathrm{d}t$;
7. $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$.

On peut également donner, à l'aide d'un changement de variable, une autre écriture du théorème de Taylor avec le reste intégral : on pose $h=b-a$ et dans l'intégrale on fait le changement de variable $t=a+u\,h$ d'où $\mathrm{d}t=h\,\mathrm{d}u$ et $b-t=a+h-(a+u\,h)=h\,(1-u)$ donc

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{h^i}{i!}\,f^{(i)}(a) \\ &\quad +\frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n\,f^{(n+1)}(a+u\,h)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Changement de variable affine

Les changements de variables $\varphi(t)=t+T$ et $\varphi(t)=-t$ mettent en évidence l'application des propriétés de périodicité et de parité dans les intégrales :

- Si f est T-périodique et continue, on a pour tous a, $b\in\mathbb{R}$, $\int_a^b f=\int_{a+T}^{b+T} f$ et $\int_a^{a+T} f=\int_b^{b+T} f$.
- Si f est paire et continue on a pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\int_{-a}^0 f=\int_0^a f$ et $\int_{-a}^a f=2\int_0^a f$.
- Si f est impaire et continue on a pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\int_{-a}^0 f=-\int_0^a f$ et $\int_{-a}^a f=0$.

4 Inégalités de Schwarz et de Minkowski

Les théorèmes de Schwarz et de Minkowski seront démontrés dans le cours d'algèbre bilinéaire.

Théorème 10 (Schwarz) *Si f, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sont intégrables sur $[a,b]$,*

$$\left|\int_{[a,b]} f\ g\right|\le\sqrt{\int_{[a,b]} f^2}\sqrt{\int_{[a,b]} g^2}.$$

Théorème 11 (Minkowski) *Si f, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sont intégrables sur $[a,b]$,*

$$\sqrt{\int_{[a,b]}(f+g)^2}\le\sqrt{\int_{[a,b]} f^2}+\sqrt{\int_{[a,b]} g^2}.$$

5 Approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes

Soit f une fonction intégrable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On reprend la subdivision de pas constant $d_n=(x_{n,i})_{0\le i\le n}$ où $x_{n,i}=a+i\frac{b-a}{n}$. La somme de Riemann associée est $S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{n,i})$. Elle admet pour limite $\int_{[a,b]} f$ lorsque $n\to\infty$.

La quantité

$$S'_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{n,i})=\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{n,i+1})$$

n'est pas strictement parler une somme de Riemann. Toutefois, c'est aussi l'intégrale d'une fonction en escalier qui tend vers $\int_{[a,b]} f$ puisque $S'_n(f)=S_n(f)+\frac{b-a}{n}(f(b)-f(a))$ (donc $(S'_n(f)-S_n(f))\to 0$).

La remarque selon laquelle $S_n(f)\le\int_{[a,b]} f\le S'_n(f)$ si f est croissante (et inversement si f est décroissante) conduit à penser que la moyenne des deux

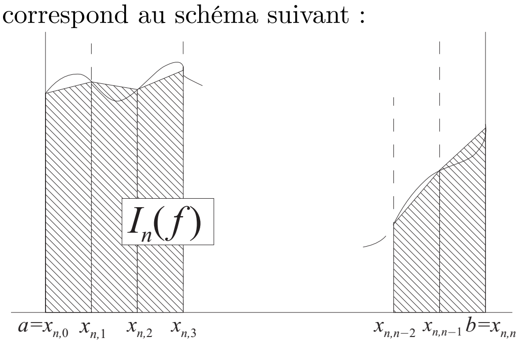
$$\begin{aligned} I_n(f) &= \frac{1}{2}(S_n(f)+S'_n(f)) \\ &= \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{n,i})+f(x_{n,i+1})) \\ &= \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{n,i})\right) \end{aligned}$$

est une meilleure approximation de $\int_{[a,b]} f$. Il est clair que

$$\lim I_n(f)=\frac{1}{2}(\lim S_n(f)+\lim S'_n(f))=\int_{[a,b]} f.$$

$I_n(f)$ s'interprète comme la somme des intégrales des fonctions *affines* qui coïncident avec f en $x_{n,\ i}$ et $x_{n,i+1}$. En effet, le terme $\frac{b-a}{2n}(f(x_{n,i})+f(x_{n,i+1}))$ correspond à l'aire du *trapèze* ayant ses sommets en $(x_{n,i},0)$, $(x_{n,i},f(x_{n,i}))$, $(x_{n,i+1},f(x_{n,i+1}))$ et $(x_{n,i+1},0)$, ce qui donne son nom à la méthode.

Cela correspond au schéma suivant :



On montre que l'erreur commise en remplaçant $\int_{[a,b]} f$ par son approximation $I_n(f)$ est $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$:

Théorème 12 *Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$,*

$$\left|\int_{[a,b]} f-I_n(f)\right|\le\frac{|b-a|^3}{12n^2}\left\|f''\right\|_\infty.$$

L'approximation est donc exacte dans le cas des fonctions affines, dont la dérivée seconde est nulle — *cf.* le polycopié "approximation".