PCSI - mathématiques

Géométrie élémentaire du plan

1 Modes de repérage dans le plan

1.1 Repère cartésien

Une *base* de l'ensemble $P = \mathbb{R}^2$ des vecteurs du plan $\mathcal{P}$ est un couple $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de deux vecteurs non colinéaires (en particulier non nuls). Alors tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ avec x, $y \in \mathbb{R}$.

Si O est un point quelconque du plan et $\mathcal{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de P, $\mathcal{R} = (O\ ;\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ est un *repère cartésien* du plan $\mathcal{P}$. Alors pour tout point $M \in \mathcal{P}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On note ceci

$$M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}\ ;$$

le couple (x, y) est appelé couple des *coordonnées* de M dans $\mathcal{R}$.

Si l'on note $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ et $M' = O + x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath}$, $\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\,\vec{\imath} + (y' - y)\,\vec{\jmath}$.

1.2 Repère orthonormal

Un repère $\mathcal{R} = (O\ ;\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ du plan $\mathcal{P}$ est dit *orthonormal* si les deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont *unitaires* (de norme 1) et orthogonaux :

$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1\ ;\ \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0. \tag{1}$$

Ce type de repère est donc bien adapté pour traiter les questions de distance, d'orthogonalité et d'angles.

On admettra provisoirement qu'un repère orthonormal $\mathcal{R}'$ se déduit toujours d'un autre repère orthonormal $\mathcal{R}$ par une *isométrie* f du plan (application conservant les distances). Une telle application peut être

- *directe* (translation ou rotation) : on dit alors que $\mathcal{R}'$ est *de même sens* que $\mathcal{R}$;
- *indirecte* (symétrie axiale + translation) : alors $\mathcal{R}'$ est *de sens contraire* à $\mathcal{R}$.

Il n'y a que deux sens possibles pour les repères. *Orienter* le plan c'est choisir l'un de ces deux sens, celui des repères *directs*, l'autre étant celui des repères *indirects*. Ce choix, de même que la représentation des repères directs, est purement conventionnel. Ces questions seront développées dans le chapitre de géométrie euclidienne.

La donnée d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O\ ;\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ permet d'identifier un vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ ou un point $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ avec le complexe $z = x + \mathrm{i}y$.

Changement de repère

Passons d'un repère $\mathcal{R} = (O\ ;\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ à un autre $\mathcal{R}' = (O'\ ;\ (\vec{\imath}', \vec{\jmath}'))$. Les données sont $\overrightarrow{OO'} = x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath}$, $\vec{\imath}' = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$, $\vec{\jmath}' = c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}$. Soit $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = O' + x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}'$. La relation de Chasles donne $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ soit

$$\begin{aligned} x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} &= x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath} + x'\,(a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}) + y'\,(c\vec{\imath} + d\vec{\jmath}) \\ &= (x_0 + ax' + cy')\,\vec{\imath} + (y_0 + bx' + dy')\,\vec{\jmath} \end{aligned}$$

d'où par identification :

$$\begin{cases} x = x_0 + ax' + cy' \\ y = y_0 + bx' + dy' \end{cases}$$

Ces formules sont à retrouver dans chaque cas pratique. Elle donnent les "anciennes" coordonnées en fonction des "nouvelles" ; c'est bien le sens utile pour traduire en sur (x', y') une condition portant sur (x, y). Si nécessaire, le changement de repère dans l'autre sens se traduit par des relations analogues.

1.3 Coordonnées polaires

La *base canonique* de $P = \mathbb{R}^2$ est constituée des vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{e}_2 = (0, 1)$. Elle est orthonormale et, par convention, directe.

Le *repère polaire* $\mathcal{R}_\theta = (O\ ;\ (\vec{u}\,(\theta), \vec{v}\,(\theta)))$ du plan euclidien $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ est défini, pour tout nombre réel θ, par :

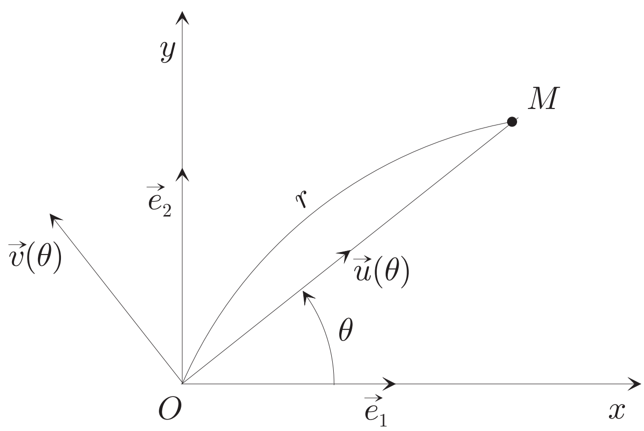
$$\begin{cases} \vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2 \\ \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{e}_1 + \cos\theta\,\vec{e}_2 \end{cases}$$

On note que dans l'identification avec $\mathbb{C}$, $\vec{u}\,(\theta)$ correspond au complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Soit $M \in \mathcal{P}$. On peut toujours trouver une écriture

$$M = O + r\vec{u}\,(\theta)$$

où r, $\theta \in \mathbb{R}$. Le couple (r, θ) s'appelle **un** *système de coordonnées polaires* de M. Contrairement aux coordonnées cartésiennes d'un point, ses coordonnées polaires ne sont pas uniques : par exemple $M = O + r\vec{u}\,(\theta) = O + r\vec{u}\,(\theta + 2k\pi) = O + (-r)\,\vec{u}\,(\theta + \pi + 2k\pi)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.



2 Produit scalaire

2.1 Définition

On munit $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormal direct et on note $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ l'angle orienté du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ ($\neq \vec{0}$).

Le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} 0 \text{ si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}, \\ \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\widehat{(\vec{u},\vec{v})} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Comme $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, cette définition est en fait indépendante de l'orientation de $\mathcal{P}$.

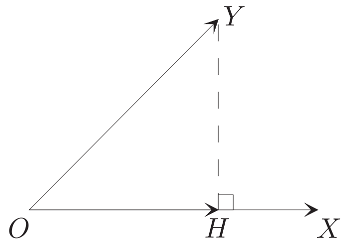
Notons que : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

2.2 Interprétation

Notons $X = O+\vec{u}$, $Y = O+\vec{v}$ et H le projeté orthogonal de Y sur la droite (OX) (lorsque $\vec{u} \neq \vec{0}$). On vérifie facilement (en distinguant selon le signe de $\cos\theta$ où $\theta = \widehat{(\vec{u},\vec{v})}$) que :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OH}.$$

Bien sûr, X et Y jouent le même rôle, donc on obtiendrait un résultat analogue considérant le projeté H' de X sur (OY).



2.3 Propriétés

2.3.1 Symétrie

Comme pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a $\widehat{(\vec{v},\vec{u})} = -\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, $\cos\widehat{(\vec{v},\vec{u})} = \cos\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$ d'où la relation de *symétrie* du produit scalaire (encore vérifiée lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$) :

$$\vec{v}\cdot\vec{u} = \vec{u}\cdot\vec{v}$$

2.3.2 Bilinéarité

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de P et deux réels λ et μ. En utilisant le résultat du 2.2 on vérifie

$$\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \lambda\vec{u}\cdot\vec{v}+\mu\vec{u}\cdot\vec{w}$$

On dit que l'application $\vec{v} \mapsto \vec{u}\cdot\vec{v}$ (pour $\vec{u}$ fixé) est *linéaire*. Comme le produit scalaire est symétrique, il en est de même de l'application $\vec{u} \mapsto \vec{u}\cdot\vec{v}$ pour $\vec{v}$ fixé. On dit que le produit scalaire est *bilinéaire* pour exprimer qu'il est "linéaire par rapport à chacun de ses termes". Ceci permet de développer les produits scalaires comme des produits de réels.

2.4 Expression en base orthonormale

Calculons dans une base orthonormale $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de P. Soient deux vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$. On développe (par bilinéarité)

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})\cdot(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}) \\ &= xx'\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}+yx'\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} \end{aligned}$$

d'où en tenant compte de (1) :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'$$

On en déduit l'expression de la norme euclidienne :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

et de la distance euclidienne d'un point $M = O+x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ à un point $N = O+x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$:

$$d(M,N) = \left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}.$$

2.5 Expression dans $\mathbb{C}$

Identifions les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ précédents avec les complexes $z = x+\mathrm{i}y$ et $z' = x'+\mathrm{i}y'$. On calcule le produit $\bar{z}z' = (x-\mathrm{i}y)(x'+\mathrm{i}y') = (xx'+yy')+\mathrm{i}(xy'-yx')$ d'où : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \mathrm{Re}(\bar{z}z')$.

3 Déterminant

3.1 Définition

On adopte les mêmes conventions qu'à la section 2.

Le *Déterminant* (ou *produit mixte*) de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est défini par

$$\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v}) = \begin{cases} 0 \text{ si } \vec{u} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}, \\ \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\widehat{(\vec{u},\vec{v})} \text{ sinon.} \end{cases}$$

On remarque que cette définition dépend, elle, de l'orientation du plan P (si celle-ci est changée, le produit mixte est multiplié par -1).

Notons aussi que

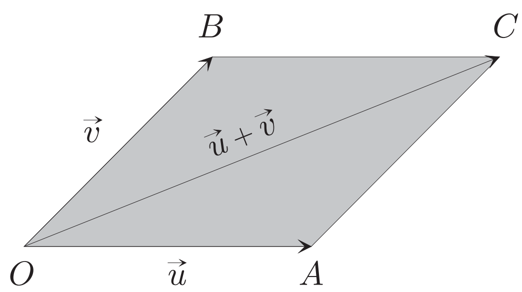
$$\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \widehat{(\vec{u},\vec{v})} = 0\ [\pi] \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires.}$$

3.2 Interprétation géométrique

En réutilisant la construction effectuée en 2.2, on vérifie facilement

Proposition 1 $|\mathrm{Det}(\vec{u},\vec{v})|$ *est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Ce parallélogramme est (O,A,C,B) si $A = O+\vec{u}$, $B = O+\vec{v}$ et $C = O+\vec{u}+\vec{v}$ ($= A+\vec{v} = B+\vec{u}$).



3.3 Propriétés

3.3.1 Antisymétrie

La condition $\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right) = -\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls donne $\sin\left(\widehat{\vec{v},\vec{u}}\right) = -\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ d'où

$$\mathrm{Det}\,(\vec{v},\vec{u}) = -\,\mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v})\,,$$

relation encore valable si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul. On dit que le produit mixte est *antisymétrique*.

3.3.2 Bilinéarité

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de P et deux réels λ et μ. En utilisant le résultat du 3.2, ou en se ramenant à 2.3.2, on vérifie

$$\mathrm{Det}\,(\vec{u},\lambda\vec{v}+\mu\vec{w}) = \lambda\,\mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v}) + \mu\,\mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{w})$$

donc dit également que l'application $\vec{v} \mapsto \mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v})$, $\vec{u}$ étant fixé, est linéaire. Comme le produit mixte est antisymétrique, il en est de même, pour $\vec{v}$ fixé, de l'application $\vec{u} \mapsto \mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v})$. Le produit mixte est donc, comme le produit scalaire, bilinéaire. On peut ainsi "développer les produits mixtes comme des produits".

3.4 Expression en base orthonormale directe

L'orientation est importante dans le cas du produit mixte. On doit calculer dans une base orthonormale $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ directe de P.

On a bien sûr $\mathrm{Det}\,(\vec{\imath},\vec{\imath}) = \mathrm{Det}\,(\vec{\jmath},\vec{\jmath}) = 0$ ($\vec{\imath}$ est colinéaire à $\vec{\imath}$...) et comme $\left(\widehat{\vec{\imath},\vec{\jmath}}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Det}\,(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = \|\vec{\imath}\|\,\|\vec{\jmath}\|\sin\frac{\pi}{2} = 1 = -\,\mathrm{Det}\,(\vec{\jmath},\vec{\imath})$.

Soient alors deux vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$ et développons par bilinéarité le produit mixte :

$$\begin{aligned}\mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v}) &= \mathrm{Det}\,(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath},x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})\\ &= xx'\,\mathrm{Det}\,(\vec{\imath},\vec{\imath}) + xy'\,\mathrm{Det}\,(\vec{\imath},\vec{\jmath})\\ &\quad +yx'\,\mathrm{Det}\,(\vec{\jmath},\vec{\imath}) + yy'\,\mathrm{Det}\,(\vec{\jmath},\vec{\jmath})\end{aligned}$$

soit grâce aux relations calculées pour $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$:

$$\mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v}) = xy' - yx'.$$

Notation 1 *Si $\vec{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}$ on écrit*

$$\mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}.$$

3.5 Expression dans $\mathbb{C}$

Utilisons à nouveau les affixes $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Il résulte également du calcul fait en 2.5 que $\mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v}) = \mathrm{Im}\,(\bar{z}z')$.

4 Droites

Une droite $\mathcal{D}$ peut être représentée de plusieurs façons, par exemple par deux points distincts A et B ($\mathcal{D} = (AB)$) ou par un point A et un vecteur directeur $\vec{u} \neq \vec{0}$ ($\mathcal{D} = A + \langle\vec{u}\rangle = A + \mathbb{R}\vec{u}$). On passe facilement de l'un à l'autre via $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ (*resp.* $B = A + \vec{u}$).

4.1 Condition d'alignement

Rappelons que le produit mixte est bien adapté pour traduire la colinéarité de deux vecteurs (*cf.* 3.1), donc aussi l'alignement de trois points A, B et C puisque

$$\begin{aligned} A,\ B,\ C \text{ alignés} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{Det}\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 0.\end{aligned}$$

4.2 Paramétrage

Soit $\mathcal{D} = A + \langle\vec{u}\rangle$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$. Un point M de $\mathcal{D}$ est de la forme $M = A + \lambda\vec{u}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $A = O + x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath}$ et $\vec{u} = \alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}$ alors $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ où

$$\left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{array}\right. \tag{2}$$

Les conditions (2) sont appelées *représentation paramétrique* de la droite $\mathcal{D}$.

4.3 Équation cartésienne

Conservons les mêmes notations. Si $M \in \mathcal{P}$, d'après 4.1, l'appartenance de M à $\mathcal{D}$ se traduit par $\mathrm{Det}\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right) = 0$ soit $\left|\begin{smallmatrix} x-x_0 & \alpha \\ y-y_0 & \beta \end{smallmatrix}\right| = 0 = \beta\,(x-x_0) - \alpha\,(y-y_0)$ ce qui se met sous la forme

$$\mathcal{D} \mid ax + by = h \tag{3}$$

équation de la droite $\mathcal{D}$.

Réciproquement si $(a,b) \neq (0,0)$ et $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que $ax + by = h$ alors $\mathcal{D}$ n'est pas vide et si $A = 0 + x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath} \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow ax + by = h = ax_0 + by_0\\ &\Leftrightarrow a\,(x-x_0) + b\,(y-y_0) = 0 = \left|\begin{smallmatrix} x-x_0 & -b \\ y-y_0 & a \end{smallmatrix}\right|\end{aligned}$$

donc $\mathcal{D}$ est bien une droite (contenant A et dirigée par $\vec{u} = -b\vec{\imath} + a\vec{\jmath}$).

4.4 Équation polaire

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation (3). Sur les coordonnées polaires de M, cette condition se traduit par $ar\cos\theta + br\sin\theta = h$ donc si $O \notin \mathcal{D}$, r ne peut s'annuler et

$$r = \frac{h}{a\cos\theta + b\sin\theta} \tag{4}$$

équation polaire de la droite $\mathcal{D}$. Réciproquement, une telle condition décrit bien une droite.

Si $O \in \mathcal{D}$, et si $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u}\,(\alpha)$, $\mathcal{D}$ admet simplement pour équation polaire $\theta = \alpha$.

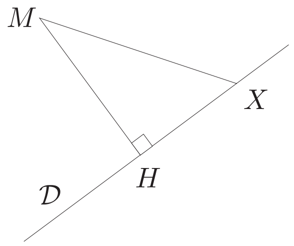
4.5 Distance à une droite

On peut aussi décrire une droite $\mathcal{D}$ par un point $A = O + x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath}$ et un vecteur normal $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$. Alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \qquad (5)\\ &\Leftrightarrow a\,(x-x_0) + b\,(y-y_0) = 0 = ax + by - h\end{aligned}$$

Lorsque de plus $\|\vec{n}\| = 1$, l'équation (5) est appelée *équation normale* de $\mathcal{D}$.

Désignons par M un point quelconque du plan et soit H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$.



Pour tout $X \in \mathcal{D}$, $\left\|\overrightarrow{MX}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{HX}\right\|^2$ (Pythagore) d'où la distance de M à $\mathcal{D}$ est atteinte en H (et en H seulement). On la calcule ainsi :

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right| &= \left|\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\cdot\vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}+\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}\right| \\ &= \left|\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}\right| \text{ car } \overrightarrow{AH}\perp\vec{n} \\ &= \left\|\overrightarrow{HM}\right\| \|\vec{n}\| \text{ car } \overrightarrow{HM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires} \end{aligned}$$

donc la distance cherchée $\left\|\overrightarrow{HM}\right\|$ est égale à

$$d(M\ ;\ \mathcal{D}) = \frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax+by-h|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

5 Cercles

Le *cercle de centre $A \in \mathcal{P}$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$* est par définition

$$\mathcal{C}(A\ ;\ r) = \{M \in \mathcal{P} \mid d(A, M) = r\},$$

ensemble des points de $\mathcal{P}$ situés à la distance r de A.

5.1 Équation cartésienne

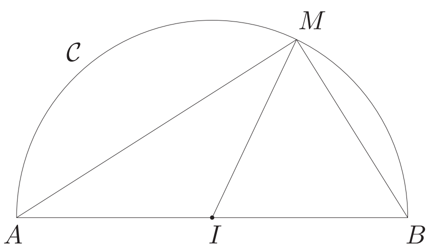
Dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O\ ;\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$, traduisons la définition précédente avec $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A\ ;\ r)$, $A = O + a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. Alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{aligned}$$

équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}$.

5.2 Définition par un diamètre

Considérons maintenant le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[A, B]$ (A, $B \in \mathcal{P}$, $A \neq B$).



Son centre est le milieu I de $[A, B]$ et son rayon est $r = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Proposition 2 *Un point M de $\mathcal{P}$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = 0$.*

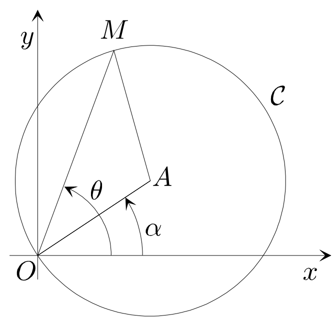
Preuve. Utilisons la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right) \\ &= \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 + \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB} \\ &= \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2 \end{aligned}$$

puisque $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. ■

5.3 Équation polaire

Cherchons maintenant une représentation polaire du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon a *en supposant que $\mathcal{C}$ passe par l'origine.*



Posons $A = O + a\vec{u}(\alpha)$.

$$M = O + r\vec{u}(\theta) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = a^2$$

(puisque $O \in \mathcal{C}$). Or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = r\vec{u}(\theta) - a\vec{u}(\alpha)$ donc

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 &= r^2 + a^2 - 2ar\ \vec{u}(\theta)\cdot\vec{u}(\alpha) \\ &= r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta-\alpha) \end{aligned}$$

(en effet $\vec{u}(\theta)\cdot\vec{u}(\alpha) = \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = \cos(\theta-\alpha)$). Par conséquent,

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta-\alpha) = a^2 \\ &\Leftrightarrow r^2 - 2ar\cos(\theta-\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow r\left(r - 2a\cos(\theta-\alpha)\right) = 0 \end{aligned}$$

donc $r = 0$ (origine) ou $r = 2a\cos(\theta-\alpha)$, mais ce dernier cas redonne le point O pour $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ p. ex. En conclusion, une équation polaire de $\mathcal{C}$ est

$$r = 2a\cos(\theta-\alpha).$$

Mentionnons les cas particuliers

- $A \in Ox$: $A = O + a\vec{\imath}$ $(\alpha = 0)$: $r = 2a\cos\theta$;
- $A \in Oy$: $A = O + a\vec{\jmath}$ $(\alpha = \frac{\pi}{2})$: $r = 2a\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ ou encore : $r = 2a\sin\theta$.