PCSI - mathématiques

Géométrie élémentaire de l'espace

1 Modes de repérage dans l'espace

1.1 Coordonnées cartésiennes, orientation

Une *base* de l'ensemble $E = \mathbb{R}^3$ des vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$ est un triplet $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires (en particulier non nuls). Tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ avec x, y, $z \in \mathbb{R}$.

Un *repère cartésien* de l'espace $\mathcal{E}$ est un couple $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)\right)$ où O est un point quelconque et $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base de E. Alors si $M \in \mathcal{E}$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit de manière unique $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ ou encore

$$M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\ ;$$

(x, y, z) est appelé triplet des *coordonnées* de M dans $\mathcal{R}$.

Si $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $M' = O + x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$, $\overrightarrow{MM'} = (x' - x)\,\vec{\imath} + (y' - y)\,\vec{\jmath} + (z' - z)\,\vec{k}$.

Le repère $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)\right)$ de $\mathcal{E}$ est dit *orthonormal* si les trois vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont *unitaires* (de norme 1) et deux à deux orthogonaux :

$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1\ ;\ \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{\imath} = 0. \qquad (1)$$

On se place dans un tel repère pour les calculs de distance, d'orthogonalité et d'angles.

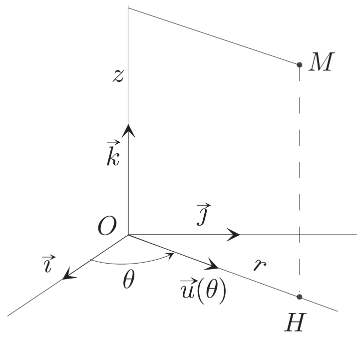
Comme dans le plan, un repère orthonormal $\mathcal{R}'$ se déduit toujours d'un autre repère orthonormal $\mathcal{R}$ par une *isométrie* f de l'espace (application conservant les distances). Celle-ci peut être

- *directe* (ou *déplacement*) : composée de translation et de rotation. Dans ce cas le repère $\mathcal{R}'$ est *de même sens* que $\mathcal{R}$;
- *indirecte* (ou *antidéplacement*) : symétrie plane composée avec un déplacement. Alors $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont dits *de sens contraires*.

À nouveau, les sens possibles pour les repères ne sont que deux. *Orienter l'espace* consiste à choisir l'un de ces deux sens appelé *direct*, l'autre étant le sens *indirect*. Ce choix est conventionnel[1]. La théorie de ces questions sera traitée dans le chapitre de géométrie euclidienne.

1.2 Coordonnées cylindriques

Dans l'espace orienté, considérons un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)\right)$. Soit M un point de $\mathcal{E}$ et notons (x, y, z) ses coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}$. On appelle H le projeté orthogonal de M sur xOy et on note (r, θ) un système de coordonnées polaires de H.



Alors le triplet (r, θ, z) est **un** *système de coordonnées cylindriques* de M dans $\mathcal{R}$.

On a donc

$$M = O + r\vec{u}\,(\theta) + z\vec{k} = O + r\cos\theta\vec{\imath} + r\sin\theta\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

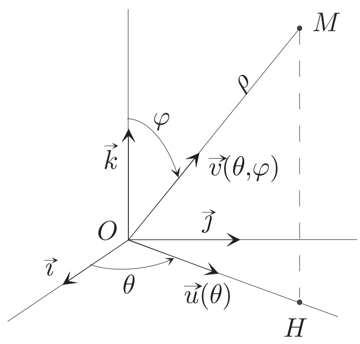
d'où le passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes de M :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

Les coordonnées cylindriques sont utiles dans tous les problèmes présentant une symétrie de révolution.

1.3 Coordonnées sphériques

On conserve les notations précédentes et on note en outre $\rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et φ une mesure de l'angle non orienté (écart angulaire) $\left(\widehat{\vec{k}, \overrightarrow{OM}}\right)$ ($\in [0, \pi]$). φ est appelée la *colatitude* de M.



Le triplet (ρ, θ, φ) est **un** *système de coordonnées sphériques* de M.

[1] On mémorise la représentation des repères directs avec la règle "*des trois doigts*", "*du tire bouchon*", ...

On peut écrire (notant $\vec{v}\,(\theta,\varphi)$ le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et de même sens) :

$$\begin{aligned} M &= O+\rho\vec{v}\,(\theta,\varphi) = O+\rho\cos\varphi\vec{k}+\rho\sin\varphi\vec{u}\,(\theta) \\ &= O+\rho\cos\varphi\vec{k}+\rho\sin\varphi\,(\cos\theta\vec{\imath}+\sin\theta\vec{\jmath})\,, \end{aligned}$$

d'où les relations entre coordonnées sphériques et cartésiennes de M :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

On réservera les coordonnées sphériques aux problèmes à symétrie sphérique.

2 Produit scalaire

2.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace E. On peut toujours trouver un[2] plan vectoriel P qui les contient. Par définition, le *produit scalaire* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans E est leur produit scalaire dans P (défini au chapitre précédent).

C'est donc la quantité $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ (ou 0 lorsque $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul).

Remarquons que cette définition ne nécessite pas d'orienter l'espace, ni même le plan P.

2.2 Propriétés

On vérifie comme dans le plan les propriétés de *bilinéarité* et de *symétrie* du produit scalaire (*cf.* chapitre précédent).

2.3 Expression en base orthonormale

Calculons dans une base orthonormale $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de E. Soient deux vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$. On développe (par bilinéarité)

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}\right)\cdot\left(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}\right) \\ &= xx'\vec{\imath}\cdot\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}+zz'\vec{k}\cdot\vec{k} \\ &\quad + 6 \text{ autres termes nuls} \end{aligned}$$

puisque les produits scalaires mutuels de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ valent 0. Ainsi :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx'+yy'+zz'$$

On en déduit l'expression de la norme euclidienne :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

et de la distance euclidienne d'un point $M = O+x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ à un point $N = O+x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$:

$$d\,(M,N) = \left\|\overrightarrow{MN}\right\| = \sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2}.$$

3 Produit vectoriel

Dans cette partie, l'espace E est *orienté*.

[2] P est unique si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, mais P existe dans tous les cas.

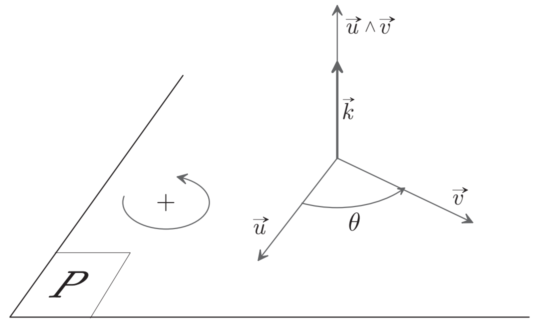
3.1 Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E, et fixons un[2] plan P contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit $\vec{k}$ un vecteur unitaire orthogonal à P. On munit P de l'*orientation induite*[3] par l'orientation de E et le choix de $\vec{k}$. On a défini au chapitre précédent le produit mixte de deux vecteurs dans un plan.

Le *produit vectoriel* de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v})\,\vec{k} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin\theta\vec{k}$$

où $\theta = \left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$:



Cette définition est donc fonction de l'orientation de E (mais pas de celle de P qui est liée au vecteur $\vec{k}$). Si l'orientation de E est changée, $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est remplacé par son opposé.

Remarquons que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est toujours un vecteur *orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$*.

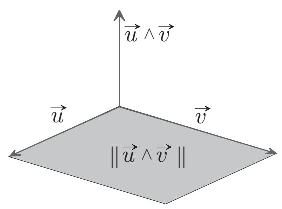
En outre, lorsque $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est une BOND de E, $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une BOND de P donc $\mathrm{Det}\,(\vec{\imath},\vec{\jmath}) = 1$ d'où : $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath} = \vec{k}$ (et donc aussi $\vec{\jmath}\wedge\vec{k} = \vec{\imath}$ et $\vec{k}\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath}$).

3.2 Interprétation

La norme du vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est

$$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = |\mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v})| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\left|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right|,$$

on rappelle qu'il s'agit de l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En particulier, $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$ *ssi* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.



3.3 Propriétés

3.3.1 Antisymétrie

En reprenant les notations du 3.1, et l'orientation du plan P étant fixée, on a vu au chapitre précédent que $\mathrm{Det}\,(\vec{v},\vec{u}) = -\,\mathrm{Det}\,(\vec{u},\vec{v})$ ce qui se traduit par

$$\vec{v}\wedge\vec{u} = -\vec{u}\wedge\vec{v}.$$

On dit que le produit vectoriel est *antisymétrique*.

[3] Elle se définit ainsi : une BON $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ de P est directe (dans P) *ssi* la BON $\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est directe dans E.

3.3.2 Bilinéarité

Fixons un vecteur $\vec{u} \in E$. D'après la définition, on passe de $\vec{v}$ à $\vec{u} \wedge \vec{v}$ en composant trois transformation géométriques :

- une projection orthogonale sur le plan orthogonal à $\vec{u}$;
- une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans ce plan muni de l'orientation induite[4] par $\vec{u}$;
- une homothétie de rapport $\|\vec{u}\|$.

On verra en algèbre que ces trois applications sont linéaires. Ainsi, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dépend linéairement du vecteur $\vec{v}$, et donc aussi (d'après 3.3.1) du vecteur $\vec{u}$.

3.4 Expression dans une base orthonormale directe

Calculons dans une base orthonormale directe $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de E. Soient deux vecteurs $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}$. D'après 3.1 et 3.3.1, on connaît les produits vectoriels deux à deux des vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$. On peut alors développer grâce à 3.3.2 :

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= \left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) \wedge \left(x'\vec{\imath} + y'\vec{\jmath} + z'\vec{k}\right) \\
&= xx'\vec{\imath} \wedge \vec{\imath} + xy'\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} + xz'\vec{\imath} \wedge \vec{k} \\
&\quad + yx'\vec{\jmath} \wedge \vec{\imath} + yy'\vec{\jmath} \wedge \vec{\jmath} + yz'\vec{\jmath} \wedge \vec{k} \\
&\quad + zx'\vec{k} \wedge \vec{\imath} + zy'\vec{k} \wedge \vec{\jmath} + zz'\vec{k} \wedge \vec{k} \\
&= (yz' - zy')\,\vec{\imath} + (zx' - xz')\,\vec{\jmath} + (xy' - yx')\,\vec{k}
\end{aligned}$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{\imath} + \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

On remarque que pour passer d'une coordonnée à la suivante, il suffit de permuter circulairement x, y et z.

4 Déterminant ou produit mixte

L'espace E est toujours *orienté*.

4.1 Définition

Soient trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de l'espace E. Le *Déterminant* (ou *produit mixte*) de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le réel

$$\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}.$$

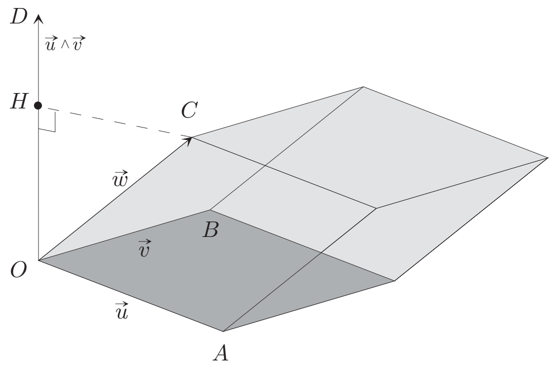
Cette définition est dépendante de l'orientation de E ; si celle-ci est inversée, le produit mixte est changé en son opposé.

On peut préciser à quelle condition $\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$: il faut et il suffit que $\vec{w} \perp \vec{u} \wedge \vec{v}$, càd que $\vec{w}$ appartienne à un plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou encore que les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

[4] *cf.* note 3 page 2.

4.2 Interprétation géométrique

Fixons une origine O dans $\mathcal{E}$ et soient les points $A = O + \vec{u}$, $B = O + \vec{v}$ et $C = O + \vec{w}$. Notons en outre $D = O + \vec{u} \wedge \vec{v}$ et H le projeté orthogonal de C sur (OD).



Alors, selon l'interprétation du produit scalaire dans le plan contenant O, C et H (*cf.* chapitre précédent) :

$$\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OH}$$

d'où

$$|\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| = \left|\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OH}\right| = \left\|\overrightarrow{OD}\right\| \left\|\overrightarrow{OH}\right\|$$

(puisque $\overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OH}$ sont colinéaires). Or

- $\left\|\overrightarrow{OD}\right\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- $\left\|\overrightarrow{OH}\right\|$ est la hauteur du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de sorte que :

$|\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$ *est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$.

4.3 Propriétés

4.3.1 Trilinéarité

Le produit scalaire et le produit vectoriel étant linéaires par rapport à chacune de leurs composantes, il est clair que le produit mixte est linéaire par rapport à chacun de ses trois arguments : on dit qu'il est *trilinéaire*.

4.3.2 Antisymétrie

Remarquons que si deux des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont égaux, le produit mixte est nul (c'est clair si $\vec{u} = \vec{v}$; si $\vec{w} = \vec{u}$ ou $\vec{v}$ il suffit de rappeler que $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$).

Il en résulte que si l'on échange deux des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, le produit mixte est changé en son opposé (là encore c'est évident pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$; le résultat pour $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (p. ex.) s'obtient en développant $\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w})$ — qui vaut 0).

Cette propriété du produit mixte est encore appelée *antisymétrie*. On a donc les relations

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= -\operatorname{Det}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\operatorname{Det}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) \\
&= -\operatorname{Det}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) \\
&= \operatorname{Det}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \operatorname{Det}(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})
\end{aligned} \tag{2}$$

puisque pour les deux dernières égalités, deux échanges ont été effectués.

4.4 Expression dans une base orthonormale directe

Notons $\mathcal{B}=\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ une base OND de E. Rappelons que $\vec{\imath}\wedge\vec{\jmath}=\vec{k}$ d'où $\operatorname{Det}\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$. Les relations (2) permettent de déterminer les autres produits mixtes (non nuls) faisant intervenir les vecteurs de $\mathcal{B}$.

Soient trois vecteurs $\vec{u}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$, $\vec{v}=x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k}$ et $\vec{w}=x''\vec{\imath}+y''\vec{\jmath}+z''\vec{k}$. On calcule en développant par trilinéarité $\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\operatorname{Det}\left(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k},x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath}+z'\vec{k},x''\vec{\imath}+y''\vec{\jmath}+z''\vec{k}\right)$. Sur les 27 termes obtenus, tous ceux contenant plusieurs fois le même vecteur disparaissent. Il n'en reste que 6 :

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) &= xy'z''\operatorname{Det}\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)+xz'y''\operatorname{Det}\left(\vec{\imath},\vec{k},\vec{\jmath}\right)\\ &\quad +yx'z''\operatorname{Det}\left(\vec{\jmath},\vec{\imath},\vec{k}\right)+yz'x''\operatorname{Det}\left(\vec{\jmath},\vec{k},\vec{\imath}\right)\\ &\quad +zx'y''\operatorname{Det}\left(\vec{k},\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)+zy'x''\operatorname{Det}\left(\vec{k},\vec{\jmath},\vec{\imath}\right)\end{aligned}$$

et l'antisymétrie permet de déterminer les produits mixtes ($=\pm1$) faisant intervenir $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ à partir de $\operatorname{Det}\left(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)=1$. On obtient finalement

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) &= xy'z''+yz'x''+zx'y''\\ &\quad -xz'y''-yx'z''-zy'x''\end{aligned}$$

ce qu'on note

$$\operatorname{Det}(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}.$$

5 Droites et plans

5.1 Paramétrage d'une droite

Soit $\mathcal{D}=A+\langle\vec{u}\rangle$ la droite passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}\neq\vec{0}$. Un point M de $\mathcal{D}$ est de la forme $M=A+\lambda\vec{u}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$. Si $A=O+x_0\vec{\imath}+y_0\vec{\jmath}+z_0\vec{k}$ et $\vec{u}=\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}+\gamma\vec{k}$ alors $M=O+x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ où

$$\left\{\begin{array}{l} x=x_0+\lambda\alpha\\ y=y_0+\lambda\beta\\ z=z_0+\lambda\gamma\end{array}\right. \tag{3}$$

Les conditions (3) sont appelées *représentation paramétrique* de la droite $\mathcal{D}$.

On passe facilement de cette situation à celle où $\mathcal{D}=(AB)$ (avec A et B deux points distincts) en posant $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ (ou inversement $B=A+\vec{u}$).

Il est aussi possible de définir la droite $\mathcal{D}$ comme intersection de deux plans non parallèles, *cf.* ci-dessous.

5.2 Équation d'un plan

Considérons le plan $\mathcal{P}$ défini par le point $A=O+x_0\vec{\imath}+y_0\vec{\jmath}+z_0\vec{k}$ et les deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}=\alpha\vec{\imath}+\beta\vec{\jmath}+\gamma\vec{k}$ et $\vec{v}=\alpha'\vec{\imath}+\beta'\vec{\jmath}+\gamma'\vec{k}$. Un point M appartient au plan $\mathcal{P}$ *ssi* les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont coplanaires, ce qui se traduit d'après 4.1 par

$$\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)=0.$$

Si $M=O+x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$, la condition précédente se traduit par $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha & \alpha'\\ y-y_0 & \beta & \beta'\\ z-z_0 & \gamma & \gamma'\end{vmatrix}=0$, ce qui se développe sous la forme

$$ax+by+cz-h=0,$$

équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

Si le plan $\mathcal{P}$ est défini par trois points A, B et C non alignés, on posera p. ex. $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.

Si $\mathcal{P}$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$, on traduira simplement l'appartenance de M à $\mathcal{P}$ par la condition

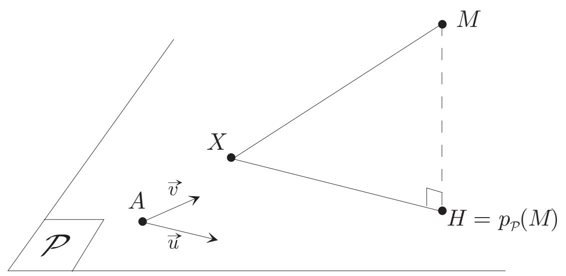
$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0. \tag{4}$$

Cette dernière relation est bien adaptée au calcul de la distance d'un point quelconque au plan $\mathcal{P}$. Lorsque $\vec{n}$ est unitaire, (4) est appelée *équation normale* de $\mathcal{P}$.

5.2.1 Distance à un plan

Replaçons-nous dans les condition de (4). Désignons par M un point quelconque de l'espace et par H son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$.

Pour tout $X\in\mathcal{P}$, $\left\|\overrightarrow{MX}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{MH}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{HX}\right\|^2$ (Pythagore) donc la distance de M à $\mathcal{P}$ est minimale uniquement en le point H.



On calcule comme au chapitre précédent :

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right| &= \left|\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right)\cdot\vec{n}\right|=\left|\overrightarrow{AH}\cdot\vec{n}+\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}\right|\\ &= \left|\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}\right| \text{ car } \overrightarrow{AH}\perp\vec{n}\\ &= \left\|\overrightarrow{HM}\right\|\|\vec{n}\| \text{ car } \overrightarrow{HM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires}\end{aligned}$$

donc la distance cherchée $\left\|\overrightarrow{HM}\right\|$ est égale à

$$d(M\ ;\ \mathcal{P})=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|ax+by+cz-h|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Dans le cas où $\mathcal{P}$ est défini par A et les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut poser $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ d'où

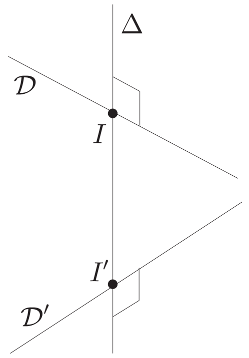
$$d(M\ ;\ \mathcal{P})=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}=\frac{\left|\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}.$$

5.3 Perpendiculaire commune

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non coplanaires de l'espace $\mathcal{E}$.

Théorème 1 Il existe *une* unique *droite* Δ *de* $\mathcal{E}$ *qui* rencontre orthogonalement $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$*.*

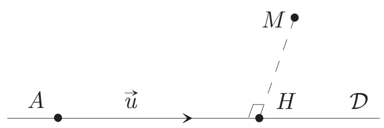
Cela signifie que $\Delta \cap \mathcal{D}$ (*resp.* $\Delta \cap \mathcal{D}'$) est un singleton $\{I\}$ (*resp.* $\{I'\}$), que $\Delta \perp \mathcal{D}$ et $\Delta \perp \mathcal{D}'$.



La droite Δ est appelée **la** *perpendiculaire commune* à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

5.4 Distance à une droite

Soit $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ ($\neq \vec{0}$). Le même raisonnement qu'en 5.2.1 montre que la distance d'un point M à $\mathcal{D}$ est atteinte en le projeté orthogonal H de M sur$\mathcal{D}$.



On la calcule ainsi :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}$$

puisque $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, d'où

$$\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| \|\vec{u}\|$$

puisque $\overrightarrow{HM} \perp \vec{u}$. Finalement :

$$d\,(M\ ;\ \mathcal{D}) = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}.$$

6 Sphères

On calcule toujours ici dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = \left(O\ ;\ \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)\right)$.

Soient $A \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. La *sphère* de centre A et de rayon r est $\mathcal{S}\,(A\ ;\ r) = \{M \in \mathcal{E} \mid d\,(A, M) = r\}$.

6.1 Équation cartésienne

Notons $\mathcal{S}$ la sphère précédente et posons $A = O + x_0\vec{\imath} + y_0\vec{\jmath} + z_0\vec{k}$ et $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Alors

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{S} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = r^2 \\ &\Leftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \end{aligned}$$

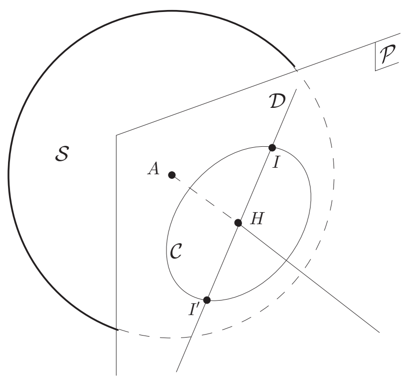
équation cartésienne de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$.

6.2 Intersection avec une droite ou un plan

On conserve les mêmes notations. Soient $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$. Notons H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$ (*resp.* $\mathcal{P}$). $\left\|\overrightarrow{AH}\right\|$ est donc la distance de A à $\mathcal{D}$ (*resp.* $\mathcal{P}$) selon 5.4 (*resp.* 5.2.1). Soit M un point de $\mathcal{P}$. Selon Pythagore, $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2$. D'autre part, $M \in \mathcal{S}$ *ssi* $\left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = r^2$ soit encore $\left\|\overrightarrow{HM}\right\|^2 = r^2 - \left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2$.

On en déduit l'intersection de $\mathcal{D}$ (*resp.* $\mathcal{P}$) et $\mathcal{S}$:

- si $\left\|\overrightarrow{AH}\right\| > r$, elle est vide ;
- si $\left\|\overrightarrow{AH}\right\| = r$, c'est le singleton $\{H\}$;
- si $\left\|\overrightarrow{AH}\right\| < r$, c'est l'ensemble des points de $\mathcal{D}$ (*resp.* $\mathcal{P}$) vérifiant $\left\|\overrightarrow{HM}\right\| = \sqrt{r^2 - \left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2}$ soit
  - dans le cas de la droite $\mathcal{D}$, une paire de points $\{I, I'\}$;
  - dans le cas du plan $\mathcal{P}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - \left\|\overrightarrow{AH}\right\|^2}$.



6.3 Intersection de deux sphères

Pour trouver l'intersection de deux sphères $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, on peut former la différence de leurs équations cartésiennes

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 &= r^2 \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 &= r'^2 \end{aligned}$$

les termes en x^2, y^2 et z^2 s'éliminent et il reste une équation de la forme $ax + by + cz = h$ caractérisant un plan $\mathcal{P}$. L'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ est égale à celle de $\mathcal{S}$ (*resp.* $\mathcal{S}'$) et $\mathcal{P}$. On se ramène ainsi au cas précédent.