PCSI - mathématiques

Géométrie affine euclidienne

Dans ce chapitre, $\mathcal{E}_n$ désigne un *espace affine euclidien*, càd un espace vectoriel euclidien E_n muni de sa structure affine canonique. En pratique l'entier naturel n sera égal à 2 ou 3. Le produit scalaire est noté $(\ \cdot\ |\ \cdot\ )$; la norme euclidienne $\|\cdot\|$.

1 Notion d'application affine

Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux $\mathbb{R}$-espaces affines (càd, deux $\mathbb{R}$-ev E et F munis de leurs structures affines canoniques). Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

Définition 1 *L'application f est* affine *s'il existe une application linéaire $\varphi \in L_{\mathbb{R}}(E, F)$ telle que*

$$\overrightarrow{f(X)\, f(Y)} = \varphi\left(\overrightarrow{XY}\right)$$

pour tous X, $Y \in \mathcal{E}$.

Lemme 1 *L'application φ est alors* unique.

Définition 2 *φ est la* partie linéaire *de f notée*

$$\varphi = L(f).$$

On note en particulier les relations, valables pour tous A, $X \in \mathcal{E}$, $\vec{x} \in E$:

$$f(A + \vec{x}) = f(A) + \varphi(\vec{x})\ ;\ f(X) = f(A) + \varphi\left(\overrightarrow{AX}\right).$$

Ces formules signifient que pour connaître une application affine, il ne suffit pas de connaître sa partie linéaire. Il faut en outre donner l'image d'un point (quelconque) par cette application.

Exemple 1

1. *Si f est constante, f est affine et $L(f) = 0_{L(E,F)}$ (application nulle) ;*

2. *($\mathcal{E} = \mathcal{F}$) Si $\vec{a} \in E$, la* translation de vecteur *$\vec{a}$ est*

$$t_{\vec{a}} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\ ;\ X \mapsto X + \vec{a}$$

   $t_{\vec{a}}$ est affine et $L(t_{\vec{a}}) = \mathrm{Id}_E$.

3. *($\mathcal{E} = \mathcal{F}$) Si $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'*homothétie de centre A et de rapport λ *est*

$$h_{A,\lambda} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\ ;\ X \mapsto A + \lambda\overrightarrow{AX}$$

   $h_{A,\lambda}$ est affine et $L(h_{A,\lambda}) = \lambda\, \mathrm{Id}_E$ (homothétie vectorielle de rapport λ).

4. *projections et symétries affines,* cf. 1.4.

1.1 Expression dans un repère

Munissons $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de repères affines $\mathcal{R} = (O\ ;\ \mathcal{U})$ et $\mathcal{R}' = (O'\ ;\ \mathcal{V})$ et considérons l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ qui associe à un point X de $\mathcal{E}$ de coordonnées $\left(x^j\right)_{1\le j\le p}$ dans $\mathcal{R}$ le point Y de $\mathcal{F}$ dont les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ sont $\left(y^i\right)_{1\le i\le n}$, avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} y^1 & = & a_{1,1}x^1 + \dots + a_{1,p}x^p + b^1 \\ \vdots & & \\ y^n & = & a_{n,1}x^1 + \dots + a_{n,p}x^p + b^n \end{array}\right.$$

Ceci peut se résumer par l'écriture matricielle

$$Y = AX + B$$

où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On a bien sûr $f(O) = B$. Il est alors immédiat de vérifier que si $\varphi \in L_{\mathbb{R}}(E, F)$ est définie par $\mathrm{mat}(\varphi\ ;\ \mathcal{V}, \mathcal{U}) = A$, les relations ci-dessus correspondent à l'écriture vectorielle

$$f(X) = f(O) + \varphi\left(\overrightarrow{OX}\right)$$

autrement dit : f est l'(unique) application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ telle que $f(O) = B$ et $L(f) = \varphi$.

On peut ainsi reconnaître une application affine directement sur son expression analytique.

1.2 Composition d'applications affines

La composée de deux applications affines est encore une application affine. Plus précisément :

Proposition 1 *Si f (*resp. *g) est une application affine de l'espace affine $\mathcal{E}$ (*resp. *$\mathcal{F}$) dans l'espace affine $\mathcal{F}$ (*resp. *$\mathcal{G}$) alors $g \circ f$ est une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{G}$ et :*

$$L(g \circ f) = L(g) \circ L(f).$$

1.3 Applications affines bijectives

Les propriétés d'une application affine sont, pour l'essentiel, déterminées par celles de sa partie linéaire.

Proposition 2 *Soient f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ et φ sa partie linéaire.*

1. *f est injective* ssi *φ est injective ;*

2. *f est une surjection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$* ssi *φ est une surjection de E sur F ;*

3. *f est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$* ssi *φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-ev de E sur F.*

Dans ce dernier cas on peut préciser :

Proposition 3 *Soit f une application affine bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$, et soit φ sa partie linéaire. Alors $f^{-1} : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ est une application affine de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}$ et :*

$$L\left(f^{-1}\right) = \varphi^{-1} = \left(L\left(f\right)\right)^{-1}.$$

On donne un nom à l'ensemble des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ lui-même :

Notation 1

$$\mathcal{GA}\left(\mathcal{E}\right) = \left\{f : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \text{ affine} \mid f \text{ bijection de } \mathcal{E}\right\}.$$

$\mathcal{GA}\left(\mathcal{E}\right)$ est le *groupe affine* de $\mathcal{E}$. Il est en effet immédiat que $\mathcal{GA}\left(\mathcal{E}\right)$ est un groupe pour $\circ$ (s.g. du groupe de toutes les bijections de $\mathcal{E}$).

1.4 Projections et symétries affines orthogonales

Soit $\mathcal{F} = A + F$ une sva de $\mathcal{E}_n$ définie par un point A et un sev F de E_n.

Définition 3 *La projection (*resp. *symétrie) affine orthogonale sur $\mathcal{F}$ (*resp. *par rapport à $\mathcal{F}$) est la projection (*resp. *symétrie) affine sur $\mathcal{F}$ (*resp. *par rapport à $\mathcal{F}$) parallèlement à $F^{\perp}$.*

C'est donc l'unique application affine $p_{\mathcal{F}}$ (*resp.* $s_{\mathcal{F}}$) de $\mathcal{E}_n$ dans lui-même ayant pour partie linéaire $L\left(p_{\mathcal{F}}\right) = \pi_F$ (*resp.* $L\left(s_{\mathcal{F}}\right) = \sigma_F$), projection (*resp.* symétrie) vectorielle orthogonale sur F (*resp.* par rapport à F) et laissant fixe tout point de $\mathcal{F}$.

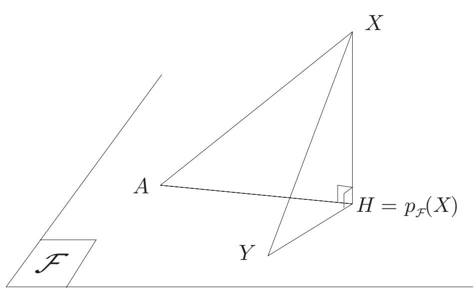
Notons $\overrightarrow{AX} = \vec{y} + \vec{z}$ la décomposition du vecteur $\overrightarrow{AX}$ sur la somme directe $E_n = F \oplus_{\perp} F^{\perp}$. On a donc

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{F}}\left(X\right) &= A + \pi_F\left(\overrightarrow{AX}\right) = A + \vec{y} \\ s_{\mathcal{F}}\left(X\right) &= A + \sigma_F\left(\overrightarrow{AX}\right) = A + \vec{y} - \vec{z} \end{aligned}$$

1.5 Distance d'un point à une sva

Soit X un point quelconque de $\mathcal{E}_n$ et notons $H = p_{\mathcal{F}}\left(X\right)$.

Soit Y un autre point de $\mathcal{F}$ (distinct de H ou non). On écrit $\overrightarrow{YX} = \overrightarrow{YH} + \overrightarrow{HX}$ et H, $Y \in \mathcal{F}$ donc $\overrightarrow{YH} \in F$ tandis que $\overrightarrow{HX} = \vec{z} \perp F$.



On applique le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{YX}\right\|^2 &= \left\|\overrightarrow{YH}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{HX}\right\|^2 \\ &\geq \left\|\overrightarrow{HX}\right\|^2 \end{aligned} \tag{1}$$

d'où

$$\begin{aligned} d\left(X, H\right) &= \min\left(d\left(X, Y\right) \mid Y \in \mathcal{F}\right) \\ &= \inf\left(d\left(X, Y\right) \mid Y \in \mathcal{F}\right) \overset{\text{déf.}}{=} d\left(X\ ;\ \mathcal{F}\right). \end{aligned}$$

En outre, si $Y \in \mathcal{F}$ vérifie $d\left(X, Y\right) = d\left(X\ ;\ \mathcal{F}\right) = d\left(X, H\right)$, la relation (1) montre que $\left\|\overrightarrow{YH}\right\|^2 = 0$ càd $Y = H$. On retrouve ainsi dans le contexte affine le résultat classique de géométrie euclidienne :

Proposition 4 *$H = p_{\mathcal{F}}\left(X\right)$ est l'unique point de $\mathcal{F}$ qui réalise la distance de X à $\mathcal{F}$.*

2 Isométries affines

Une isométrie est une application conservant les distances :

Définition 4 *Soit $f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$. f est une* isométrie *si f est affine et*

$$d\left(f\left(X\right), f\left(Y\right)\right) = d\left(X, Y\right)$$

pour tous X, $Y \in \mathcal{E}_n$.

Les isométries affines correspondent aux endomorphismes orthogonaux dans le sens suivant :

Proposition 5 *Soit f une application affine de $\mathcal{E}_n$ dans lui-même. Il y a équivalence entre*

(1) f est une isométrie de $\mathcal{E}_n$ et

(2) $\varphi = L\left(f\right) \in \mathcal{O}\left(E_n\right)$.

Ce résultat permet de mettre en évidence plusieurs exemples d'isométries affines, ainsi que les propriétés élémentaires de ces applications :

Exemple 2

1. *$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_n}$; les translations ;*
2. *Les symétries affines orthogonales ;*
3. *Les endomorphismes orthogonaux considérés comme applications affines.*

On déduit également de la proposition 5. les propriétés élémentaires suivantes :

- Les isométries affines respectent l'orthogonalité et les angles ;
- Toute isométrie affine est bijective (car sa partie linéaire l'est) ;
- Le déterminant de la partie linéaire d'une isométrie affine est ± 1.

2.1 Groupe des isométries de $\mathcal{E}_n$

Définition 5 *On note*

- $\text{Is}(\mathcal{E}_n) = \{f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n \mid f \text{ isométrie de } \mathcal{E}_n\}$;
- $\text{Is}_+(\mathcal{E}_n) = \{f \in \text{Is}(\mathcal{E}_n) \mid \det(L(f)) = +1\}$;
- $\text{Is}_-(\mathcal{E}_n) = \{f \in \text{Is}(\mathcal{E}_n) \mid \det(L(f)) = -1\}$.

Les éléments de $\text{Is}_+(\mathcal{E}_n)$ (*resp.* $\text{Is}_-(\mathcal{E}_n)$) sont appelés *isométries directes* (*resp. indirectes*) ou *déplacements* (*resp. antidéplacements*) de $\mathcal{E}_n$.

On déduit facilement de la proposition 5. les résultats de structure suivants :

Proposition 6 $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$ *est un groupe pour* $\circ$ *(s.g. de* $\mathcal{GA}(\mathcal{E}_n)$*) dont* $\text{Is}_+(\mathcal{E}_n)$ *est un sous-groupe.*

Remarque 1 *La composée de deux antidéplacements est un déplacement.*

Les points suivants aideront à préciser les éléments de $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$ lorsque $n = 2$ ou 3.

Définition 6 *Une* rotation *(affine) de* $\mathcal{E}_n$ *est un déplacement de* $\mathcal{E}_n$ *admettant au moins un point fixe.*

Lemme 2 *Toute isométrie de* $\mathcal{E}_n$ *est la composée d'une translation et d'un endomorphisme orthogonal de* E_n.

Définition 7

- *Une* réflexion *est une symétrie affine orthogonale par rapport à un hyperplan affine. (C'est toujours une isométrie indirecte.)*
- *Un* demi-tour *(ou* retournement*) est une symétrie affine orthogonale par rapport à une droite. C'est une isométrie directe lorsque n est impair, indirecte sinon.*

3 Isométries du plan

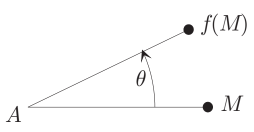
Théorème 1

1. *Tout déplacement de* $\mathcal{E}_2$ *est une translation de vecteur* $\vec{a}$ *ou une rotation de centre A ;*
2. *Tout antidéplacement de* $\mathcal{E}_2$ *est soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite* $\mathcal{D}$*, soit la composée commutative d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite* $\mathcal{D}$ *et d'une translation de vecteur* $\vec{a} \in D$ *("symétrie glissée").*

On peut préciser le classement en fonction de la présence ou non de points fixes :

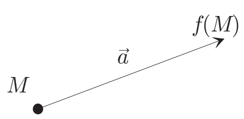
3.1 Isométries directes

avec points fixes



rotation

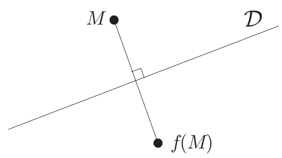
sans points fixes



translation

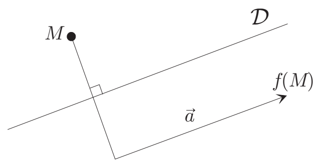
3.2 Isométries indirectes

avec points fixes



symétrie $/\mathcal{D}$

sans points fixes



symétrie glissée

3.3 Génération par les réflexions

Comme les rotations et les translations peuvent être réalisées comme composée de deux réflexions (symétries par rapport aux droites, dans le cas de $\mathcal{E}_2$) on obtient :

Théorème 2 *Toute isométrie directe (*resp. *indirecte) de* $\mathcal{E}_2$ *est composée d'au plus deux (*resp. *trois) réflexions.*

En particulier, les réflexions engendrent le groupe $\text{Is}(\mathcal{E}_n)$.

4 Similitudes

4.1 Similitudes vectorielles

4.1.1 Définition

Une similitude vectorielle est une application conservant les rapports entre les normes des vecteurs :

Définition 8 $f \in L(E_n)$ *est une* similitude *(vectorielle) de l'espace vectoriel euclidien* E_n *s'il existe* $k \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que pour tout* $x \in E_n$

$$\|f(x)\| = k\|x\| \tag{2}$$

On en déduit que pour tous $x, y \in E_n$, $x \neq 0_{E_n}$: $\frac{\|f(y)\|}{\|f(x)\|} = \frac{\|y\|}{\|x\|}$. k est appelé le *rapport* de la similitude f.

Notation 2 *On note* $\mathcal{S}(E_n)$ *l'ensemble des similitudes (vectorielles) de* E_n.

$\mathcal{S}(E_n)$ est un groupe pour $\circ$ (s.g. de $GL(E_n)$).

4.1.2 Caractérisation

Soit f une similitude vectorielle de rapport k. Posons $g = \frac{1}{k}.f$: alors $g \in L(E_n)$ et vérifie $\|g(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E_n$. Donc g est un endomorphisme orthogonal : $g \in \mathcal{O}(E_n)$, et $f = k.g$. La réciproque est évidente. Ainsi :

Proposition 7 *Un endomorphisme de* E_n *est une similitude* ssi *il est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal de* E_n.

Il en résulte que les similitudes conservent les écarts angulaires — et notamment l'orthogonalité[1].

La décomposition est évidemment commutative (puisque les homothéties commutent avec tous les autres endomorphismes) mais pas unique : en effet si $f = k.g$, alors aussi $f = (-k)(-g)$. On retrouve l'unicité si l'on impose $k > 0$. On peut alors poser (si $f = k.g$ avec $k > 0$) :

[1] On peut montrer que cette propriété est caractéristique.

Définition 9 *f est une similitude* directe *(*resp. indirecte*) si $g \in \mathcal{SO}(E_n)$ (*resp. *$\mathcal{O}^-(E_n)$).*

Seules les premières forment un groupe (s.g. de $(\mathcal{S}(E), \circ)$). Les similitudes directes conservent en outre les angles orientés.

4.2 Similitudes affines

4.2.1 Définition

Une similitude affine est une application (affine) conservant les rapports des distances entre points :

Définition 10 *$f : \mathcal{E}_n \to \mathcal{E}_n$ est une* similitude affine *s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que*

$$d(f(X), f(Y)) = k\ d(X, Y)$$

pour tous x, $y \in \mathcal{E}_n$.

Une similitude affine conserve donc les écarts angulaires (le parallélisme, l'orthogonalité) et bien sûr transforme un triangle en un autre triangle semblable. Elles forment un groupe pour la loi $\circ$.

4.2.2 Caractérisation

Alors comme dans le cas vectoriel, si $g = \frac{1}{k}.f$, g vérifie $d(g(X), g(Y)) = \left\|\overrightarrow{g(X)\,g(Y)}\right\| = \left\|\overrightarrow{XY}\right\|$, condition qui implique que g est affine (et donc une isométrie affine). Par conséquent, la partie linéaire φ de g est une isométrie vectorielle et celle de f est $L(f) = k\ L(g) = k\varphi$ est une similitude vectorielle.

La réciproque est vraie : si $L(f) = k\varphi$ où $\varphi \in \mathcal{O}(E_n)$, $L\left(\frac{1}{k}.f\right) = \varphi$ dont il résulte (prop. 5) que $g = \frac{1}{k}.f$ est une isométrie affine et donc $f = k.g$ est une similitude affine. En conclusion :

Proposition 8 *Les similitudes affines sont exactement les applications affines dont la partie linéaire est une similitude vectorielle.*

On peut donc distinguer, comme dans le cas vectoriel, entre similitudes directes et indirectes :

Définition 11 *La similitude affine f est* directe *(*resp. indirecte*)* ssi *sa partie linéaire φ est directe (*resp. *indirecte).*

4.2.3 Similitudes planes

L'identification de $\mathcal{E}_2$ au plan complexe fournit une description des similitudes planes. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

- f est une similitude directe de $\mathcal{E}_2$ ($\simeq_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$) *ssi* $f(z)$ est de la forme $az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$;

- f est une similitude indirecte de $\mathcal{E}_2$ *ssi* $f(z)$ est de la forme $a\bar{z} + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

5 Isométries de $\mathcal{E}_3$

Théorème 3

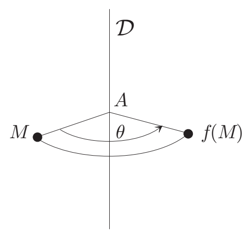
1. *Tout déplacement de $\mathcal{E}_3$ est soit une rotation d'axe $\mathcal{D}$, soit la composée commutative d'une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'une translation de vecteur $\vec{a} \in D$, direction de $\mathcal{D}$ ("vissage").*

2. *Tout antidéplacement de $\mathcal{E}_3$ est soit la composée commutative d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan $\mathcal{P}$ et d'une translation de vecteur $\vec{a} \in P$ ("symétrie glissée"), soit la composée commutative d'une rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan $\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$.*

On obtient la classification suivante :

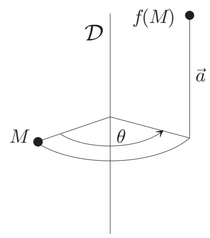
5.1 Isométries directes

avec points fixes



rotation

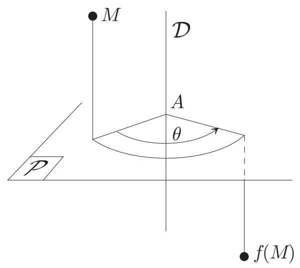
sans points fixes



vissage
(ou translation)

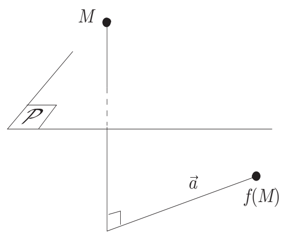
5.2 Isométries indirectes

avec points fixes



rotation d'axe $\mathcal{D}$
$\circ$ symétrie $/\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$

sans points fixes



symétrie glissée

5.3 Génération par les réflexions

En dimension 3, une réflexion désigne une symétrie par rapport à un plan.

Les mêmes remarques qu'en dimension 2 peuvent être appliquées, toutefois la situation est plus compliquée dans le cas des isométries directes à cause de l'existence des vissages.

Théorème 4 *Toute isométrie directe (*resp. *indirecte) de $\mathcal{E}_2$ est composée d'au plus quatre (*resp. *trois) réflexions.*

Les réflexions de $\mathcal{E}_3$ engendrent donc également le groupe $\mathrm{Is}(\mathcal{E}_3)$. (On peut montrer que ce résultat est général.)