PCSI - mathématiques

Fonctions numériques d'une variable réelle

Dans tout ce chapitre, on considère des fonctions définies sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

1 L'espace $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$

1.1 Généralités

On note $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ (ou $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$) l'ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ est muni des opérations $+$ et $\times$ définies par :

- $f+g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x)+g(x)$;
- $f \times g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto f(x) \times g(x)$

qui en font un anneau commutatif, ainsi que de la relation d'ordre $\leq$ définie par : $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leq g(x)$.

Attention, contrairement à celle de $\mathbb{R}$, cette relation d'ordre n'est pas totale.

1.2 Fonctions particulières

1.2.1 Fonctions bornées

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est

- *majorée* s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}$, $f(x) \leq b$, càd si l'ensemble $\operatorname{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$. On note alors $\sup_{\mathcal{D}} f = \sup(\operatorname{Im}(f)) = \sup\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}$.
- *minorée* s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathcal{D}$, $a \leq f(x)$ auquel cas on peut noter $\inf_{\mathcal{D}} f = \inf\{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\}$.
- *bornée* si f est majorée et minorée, auquel cas les deux quantités $\sup_{\mathcal{D}} f$ et $\inf_{\mathcal{D}} f$ sont définies.

Comme au chapitre sur les suites :

Lemme 1 *f est bornée* ssi *$|f|$ est majorée, càd s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$: $|f(x)| \leq M$.*

On en déduit que la somme et le produit de deux fonctions bornées sont bornées. Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{B}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ des fonctions bornées sur $\mathcal{D}$ est un *sous-anneau* de $\mathcal{F}(\mathcal{D}, \mathbb{R})$.

1.2.2 Fonctions monotones

Dans cette section, on suppose que $\mathcal{D}$ est un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est

- *croissante* si :
$\forall x \in I, \forall x' \in I, x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$;
- *strictement croissante* si :
$\forall x \in I, \forall x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$;
- *décroissante* si :
$\forall x \in I, \forall x' \in I, x \leq x' \Rightarrow f(x') \leq f(x)$;
- *strictement décroissante* si :
$\forall x \in I, \forall x' \in I, x < x' \Rightarrow f(x') < f(x)$;
- *monotone* si f est croissante ou décroissante ;
- *strictement monotone* si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

La seule opération qui fonctionne de manière satisfaisante par rapport aux propriétés précédentes est la composition :

Proposition 1 *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f est monotone sur I et si g est monotone sur J, alors $g \circ f$ est monotone sur I.*

On peut même préciser le sens de variation de $g \circ f$ en fonction de ceux de f et g, et énoncer un résultat semblable pour les fonctions strictement monotones.

1.2.3 Fonctions paires, impaires

Dans cette section, $\mathcal{D}$ est supposé "symétrique" : pour tout$x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$.

Définition 1 *f est* paire *(*resp. impaire*) si pour tout réel $x \in \mathcal{D}$ on a :*

$$f(-x) = f(x) \ \text{(resp. } -f(x)\text{)}.$$

Cela signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'axe Oy (*resp.* l'origine).

Exemple 1 *$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto x^n$ est paire (*resp. *impaire) ssi l'entier n est par (*resp. *impair).*

Une somme de fonctions paires (*resp.* impaires) est paire (*resp.* impaire). Le caractère fondamental des fonctions paires/impaires apparaît dans le résultat suivant :

Théorème 1 *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.* Il existe *un* unique *couple de fonctions (f_p, f_i) tel que*

$$f = f_p + f_i$$

avec f_p paire et f_i impaire.

La fonction f_p (*resp.* f_i) est la *partie paire* (*resp.* la *partie impaire*) de f.

Exemple 2 *La partie paire (*resp. *impaire) de* exp *est* ch *(*resp. sh*).*

1.2.4 Fonctions périodiques

Dans cette section, $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et soit $T \in \mathbb{R}$. On dit que T est *période* de f si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x).$$

Cette définition est trivialement vérifiée pour $T = 0$. Aussi pose-t-on :

Définition 2 *f est* périodique *si f admet au moins une période* non nulle.

Exemple 3

1. *D (partie décimale) ($T \in \mathbb{Z}$) ;*
2. $\sin$ *($T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) ;*
3. *$\chi_{\mathbb{Q}}$ ($T =$ tout $r \in \mathbb{Q}$).*

Attention, s'il est vrai que la somme ou le produit de deux fonctions de période T_0 fixée soit T_0-périodique, c'est faux pour des fonctions de périodes quelconques.

1.2.5 Fonctions lipschitziennes

À nouveau, $\mathcal{D}$ doit être un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que

- f est *k-lipschitzienne* sur I si pour tous x, $x' \in I$: $|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|$;
- f est *lipschitzienne* sur I s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que f soit k-lipschitzienne sur I.

Cela signifie que les taux d'accroissement pour la fonction f sont bornés par k (nécessairement ≥ 0), *cf.* chapitre "dérivabilité".

Exemple 4 *La fonction valeur absolue est* 1*-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

Les fonctions lipschitziennes font partie de l'importante catégorie des fonctions continues sur I, *cf.* partie 4.

2 Limites de fonctions

Contrairement aux suites, il y a pour les fonctions une grande variété de conditions d'étude des limites.

2.1 Limite finie en $a \in \mathbb{R}$

On suppose que le domaine $\mathcal{D}$ vérifie

$$\exists r \in \mathbb{R}_+^*, \;]a-r, a+r[\setminus \{a\} \subset \mathcal{D} \qquad (\mathrm{H}_f(a))$$

Définition 3 *f* admet une limite *en a s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \quad |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon \qquad (\mathrm{E}_\ell)$$

On vérifie comme pour les suites le

Lemme 2 (unicité de la limite) *Si f admet une limite en a, il existe un* unique *réel ℓ vérifiant* (E_ℓ).

Ce lemme permet de poser

Définition 4 *ℓ est la* limite *de f en a notée*

$$\ell = \lim_a f = \lim_{x \to a} f(x).$$

Cette notation impose les mêmes précautions d'emploi que dans le cas des suites.

Exemple 5

1. *Si f est constante en c, $\lim_a f = c$ pour tout a ;*
2. *$\lim_a \mathrm{Id}_{\mathcal{D}} = a$ pour tout a ;*
3. *E (partie entière) n'a de limite en aucun $a \in \mathbb{Z}$;*
4. *$\chi_{\mathbb{Q}}$ n'a de limite en aucun point de $\mathbb{R}$.*

Remarque 1 *La définition 4 ne nécessite pas que a appartienne à $\mathcal{D}$, mais si c'est la cas alors nécessairement $\ell = f(a)$, ce qui conduit à l'importante définition suivante :*

Définition 5 *f est* continue en *a si $a \in \mathcal{D}$ et si f admet pour limite $f(a)$ en a, ce qui s'écrit :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \; |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Par exemple, les fonctions constantes, la fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ sont continues en tout point de $\mathbb{R}$. Il est inutile de multiplier les exemples, on va en construire beaucoup d'autres grâce aux opérations sur les limites. Notons toutefois :

Exemple 6 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur l'intervalle I, f est continue en a pour tout $a \in I$.*

2.2 Autres énoncés de limites

- Sous l'hypothèse $(\mathrm{H}_f(a^+))$: $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $]a, a+r[\subset \mathcal{D}$ on dit que f *admet pour limite ℓ à droite en a* si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \; a < x < a + \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
(noté $\lim_{a^+} f = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$).
- Sous l'hypothèse $(\mathrm{H}_f(a^-))$: $\exists r \in \mathbb{R}_+^*$, $]a-r, a[\subset \mathcal{D}$ on dit que f *admet pour limite ℓ à gauche en a* si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \; a - \alpha < x < a \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
(noté $\lim_{a^-} f = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$).
- Sous l'hypothèse $(\mathrm{H}_f(+\infty))$: $\exists r \in \mathbb{R}$, $]r, +\infty[\subset \mathcal{D}$ on dit que f *admet pour limite ℓ en $+\infty$* si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, \; x > B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
(noté $\lim_{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$).
- Sous l'hypothèse $(\mathrm{H}_f(-\infty))$: $\exists r \in \mathbb{R}$, $]-\infty, r[\subset \mathcal{D}$ on dit que f *admet pour limite ℓ en $-\infty$* si
$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, \; x < B \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
(noté $\lim_{-\infty} f = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$).
- Sous l'hypothèse $(\mathrm{H}_f(a))$, on dit que f *admet pour limite $+\infty$ en a* si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \; |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$
(noté $\lim_a f = \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$).
- Sous l'hypothèse $(\mathrm{H}_f(a))$, on dit que f *admet pour limite $-\infty$ en a* si
$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \; |x - a| < \alpha \Rightarrow f(x) < A$$
(noté $\lim_a f = \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$).

Toutes ces possibilités se combinent entre elles pour donner une famille d'énoncés modulaires de la forme générale

$$\lim_{\mathcal{B}} f = \mathcal{A}$$

où $\mathcal{B}$ est l'une des conditions $[x \to a]$, $[x \to a^+]$, $[x \to a^-]$, $[x \to +\infty]$, $[x \to -\infty]$ et $\mathcal{A}$ l'une des formes possibles de limite : $\ell \in \mathbb{R}$, $+\infty$ ou $-\infty$, selon le schéma suivant :

$$\underbrace{\boxed{}\ ,\ \overbrace{\boxed{}\ ,\ \forall x \in \mathcal{D},\ \boxed{}}^{\mathcal{B}}\ \Rightarrow\ \boxed{}}_{\mathcal{A}}$$

On a les notions de *continuité à gauche en a* (f admet pour limite $f(a)$ à gauche en a), *continuité à droite en a* ($\lim_{a^+} f = f(a)$).

Attention, si f admet pour limite ℓ en a, f admet pour limite ℓ à droite et à gauche en a, mais la réciproque est fausse. Par contre, f est continue en a *ssi* f est continue à droite et à gauche en a.

Exemple 7 *E (partie entière) admet pour limite $n-1$ à gauche et n à droite en $n \in \mathbb{Z}$.*

2.3 Opérations sur les limites

Soit $\mathcal{B}$ une condition d'étude de limite.

Dans les propriétés suivantes, par "selon $\mathcal{B}$" on entend : sur un intervalle adapté à la condition $\mathcal{B}$: $]a, a+r[$ si $\mathcal{B}$ est $[x \to a^+]$, $]-\infty, r[$ si $\mathcal{B}$ est $[x \to -\infty]$, etc.

Les propriétés opératoires des limites de fonctions se déduisent des deux lemmes suivants :

Lemme 3

1. *Si* $\lim_{\mathcal{B}} f = 0$ *et si g est bornée selon $\mathcal{B}$,* $\lim_{\mathcal{B}} fg = 0$ *;*
2. *Si* $\lim_{\mathcal{B}} f = \ell > 0$*, f est minorée selon $\mathcal{B}$ par un réel strictement positif.*

somme :

		$\lim_{\mathcal{B}} f$ $-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lim_{\mathcal{B}} g$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(^1)$
	$\ell' \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
	$+\infty$	$(^1)$	$+\infty$	$+\infty$

produit :

		$\lim_{\mathcal{B}} f$ $-\infty$	$\ell < 0$	0	$\ell > 0$	$+\infty$
$\lim_{\mathcal{B}} g$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$(^2)$	$-\infty$	$-\infty$
	$\ell' < 0$	$+\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$-\infty$
	0	$(^2)$	0	0	0	$(^2)$
	$\ell' > 0$	$-\infty$	$\ell\ell'$	0	$\ell\ell'$	$+\infty$
	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$(^2)$	$+\infty$	$+\infty$

inverse :

$\lim_{\mathcal{B}} f$	$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	0	$+\infty$
$\lim_{\mathcal{B}} \left(\frac{1}{f}\right)$	0	$\frac{1}{\ell}$	$(^3)$	0

On en déduit notamment :

Corollaire 1 *Si f et g sont définies selon $\mathcal{B} = [x \to a]$:*

1. *Si f et g sont continues en a, $f+g$ et fg sont continues en a.*
2. *Si f est continue en a et si* $\boldsymbol{f(a) \neq 0}$*, $\frac{1}{f}$ est continue en a.*

On en déduit la continuité d'un quotient $\frac{f}{g}$ si f, g sont continues en a, $\boldsymbol{g(a) \neq 0}$.

Corollaire 2

1. *Toute fonction polynomiale est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.*
2. *Toute fonction rationnelle est continue en tout point a de son domaine de définition.*

composée

Dans le cas des fonctions, on peut aussi "composer les limites" :

Théorème 2 (composition des limites) *Si f est définie selon $\mathcal{B}$, admet pour limite ℓ selon $\mathcal{B}$, si g est définie au voisinage de ℓ et est* continue[4] en *ℓ alors : $g \circ f$ admet pour limite $g(\ell)$ selon $\mathcal{B}$.*

L'énoncé est notablement plus simple dans le cas de fonctions continues :

Corollaire 3 *Si f est définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et continue en a, si g est définie au voisinage de $f(a)$ et continue en $f(a)$ alors : $g \circ f$ est continue en a.*

On peut enfin caractériser la continuité à l'aide de suites :

Théorème 3 ("continuité séquentielle") *Si f est définie au voisinage de a, il y a équivalence entre :*

1. *f est continue en a et*
2. *pour toute suite (u_n) convergeant vers a, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$.*

Ce théorème peut être uilisé pour nier la continuité en a d'une application f.

2.4 Limites et ordre

On retrouve ici les mêmes énoncés que pour les suites. Soit $\mathcal{B}$ une condition d'étude de limite.

Théorème 4 (passage à la limite) *Si f est définie selon $\mathcal{B}$, positive ou nulle selon $\mathcal{B}$ et si f admet pour limite ℓ selon $\mathcal{B}$ alors :*

$$\ell \geq 0.$$

Rappel : SEULES les inégalités **LARGES** passent à la limite !

Corollaire 4 *Soient f et g deux fonctions définies selon $\mathcal{B}$, admettant pour limites respectives ℓ et ℓ' selon $\mathcal{B}$. Si l'on a selon $\mathcal{B}$ l'inégalité $f \leq g$ alors : $\ell \leq \ell'$.*

Le th. d'encadrement s'énonce ainsi :

Théorème 5 (encadrement) *Soient trois fonctions f, g et h définies selon $\mathcal{B}$ et vérifiant selon $\mathcal{B}$ l'inégalité $f \leq g \leq h$. Si f et h admettent selon $\mathcal{B}$ la* même *limite ℓ, alors :* $\lim_{\mathcal{B}} g = \ell$.

Les fonctions monotones présentent (comme les suites) des propriétés particulières vis-à-vis des limites. Nous les détaillerons dans la partie 4.3.

[1] forme indéterminée "$\infty - \infty$"
[2] forme indéterminée "$0 \times \infty$"
[3] Ici, on ne peut pas conclure à moins de connaître le *signe* de f.

[4] Ce résultat est *faux* si l'on suppose seulement que *g admet une limite ℓ'* en ℓ.

3 Relations de comparaison

Les relations de comparaison sont définies de la même manière que pour les suites, mais il faut préciser la condition $\mathcal{B}$ d'étude de limite adoptée.

3.1 Relation de domination

Soient deux fonctions f, g définies selon $\mathcal{B}$.

Définition 6 *f est* dominée *par g s'il existe une fonction β définie et bornée selon $\mathcal{B}$ telle que l'on ait selon $\mathcal{B}$ la relation*

$$f = \beta g.$$

Notation 1 *On écrit $f = O(g)\ [\mathcal{B}]$.*

Si g ne s'annule pas selon $\mathcal{B}$, f est dominée par g selon $\mathcal{B}$ *ssi* $\frac{f}{g}$ est bornée selon $\mathcal{B}$.

Exemple 8

- $f = O(0) \Leftrightarrow f$ *est nulle selon $\mathcal{B}$ ([5]) ;*
- $f = O(1) \Leftrightarrow f$ *est bornée selon $\mathcal{B}$.*

3.1.1 Propriétés de la relation "O"

Pour toutes fonctions f, g, h, k définies selon $\mathcal{B}$ on a les relations suivantes :

1. $f = O(f)\ [\mathcal{B}]$;
2. $(f = O(g)\ [\mathcal{B}]$ et $g = O(h)\ [\mathcal{B}]) \Rightarrow f = O(h)\ [\mathcal{B}]$;
3. $(f = O(h)\ [\mathcal{B}]$ et $g = O(k)\ [\mathcal{B}]) \Rightarrow fg = O(hk)\ [\mathcal{B}]$.

Attention ! On ne peut pas *ajouter* des "O".

3.2 Relation de prépondérance

Soient f, g définies selon $\mathcal{B}$.

Définition 7 *f est* négligeable *devant g (ou : g est* prépondérante *sur f) selon $\mathcal{B}$ s'il existe une fonction ε définie selon $\mathcal{B}$ telle que* $\lim_{\mathcal{B}} \varepsilon = 0$ *et (selon $\mathcal{B}$) :*

$$f = \varepsilon g.$$

Notation 2 *On écrit $f = o(g)\ [\mathcal{B}]$.*

Si g ne s'annule pas selon $\mathcal{B}$, f est négligeable devant g selon $\mathcal{B}$ *ssi* $\lim_{\mathcal{B}} \frac{f}{g} = 0$.

Exemple 9

- $x = o\left(x^2\right)\ [x \to +\infty]$ *;*
- $x^2 = o(x)\ [x \to 0]$ *;*
- $f = o(0)\ [\mathcal{B}] \Leftrightarrow f$ *est nulle selon $\mathcal{B}$ ([5]) ;*
- $f = o(1)\ [\mathcal{B}] \Leftrightarrow \lim_{\mathcal{B}} f = 0$ *;*
- $f = o(f)\ [\mathcal{B}] \Leftrightarrow f$ *est nulle selon $\mathcal{B}$;*
- *Voir aussi le chapitre "fonctions exponentielles, logarithmes, puissances".*

3.2.1 Propriétés de la relation "o"

Pour toutes fonctions f, g, h, k définies selon $\mathcal{B}$ on a les relations suivantes :

1. $f = o(g)\ [\mathcal{B}] \Rightarrow f = O(g)\ [\mathcal{B}]$;
2. $(f = o(g)\ [\mathcal{B}]$ et $g = O(h)\ [\mathcal{B}]) \Rightarrow f = o(h)\ [\mathcal{B}]$;
3. $(f = o(h)\ [\mathcal{B}]$ et $g = O(k)\ [\mathcal{B}]) \Rightarrow fg = o(hk)\ [\mathcal{B}]$.

Mais **attention !** On ne peut pas *ajouter* des relations "o".

3.3 Équivalence des fonctions

Soient f, g définies selon $\mathcal{B}$.

Définition 8 *f est* équivalente *à g selon $\mathcal{B}$ si*

$$f - g = o(g)\ [\mathcal{B}].$$

Notation 3 *$f \sim_{\mathcal{B}} g$.*

La définition 8 signifie qu'il existe une fonction ε telle que $\lim_{\mathcal{B}} \varepsilon = 0$ et que selon $\mathcal{B}$ on ait : $f - g = \varepsilon g$ soit

$$f = (1 + \varepsilon)\, g.$$

Si g en s'annule pas selon $\mathcal{B}$, cela revient à dire que le quotient $\frac{f}{g}$ admet pour limite 1 selon $\mathcal{B}$.

3.3.1 Propriétés de la relation "$\sim_{\mathcal{B}}$"

Proposition 2 *La relation "$\sim_{\mathcal{B}}$" est une* relation d'équivalence *sur l'ensemble, noté $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$, des fonctions définies selon $\mathcal{B}$.*

En particulier, la relation "$\sim_{\mathcal{B}}$" est symétrique, et l'on pourra dire simplement "f et g sont équivalentes.

On a en outre, quelles que soient les fonctions f, g, h, $k \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R})$:

1. Si $f \sim_{\mathcal{B}} g$, f et g ont le même signe selon $\mathcal{B}$;
2. $f \sim_{\mathcal{B}} 0 \Leftrightarrow f$ est nulle selon $\mathcal{B}$ ([5]) ;
3. $(f \sim_{\mathcal{B}} h$ et $g \sim_{\mathcal{B}} k) \Rightarrow fg \sim_{\mathcal{B}} hk$;
   (**ATTENTION ! ! ! Impossible d'AJOUTER DES EQUIVALENTS !**)
4. Si $f \sim_{\mathcal{B}} g$ et f ne s'annule pas selon $\mathcal{B}$, il en est de même de g et : $\frac{1}{f} \sim_{\mathcal{B}} \frac{1}{g}$;
5. (fondamental) Si $f \sim_{\mathcal{B}} g$ et si f admet une limite ℓ selon $\mathcal{B}$, il en est de même de g.

Donc on va pouvoir utiliser la relation "$\sim_{\mathcal{B}}$" pour résoudre un grand nombre de formes indéterminées[6], en remplaçant la fonction initiale par d'autres fonctions équivalentes, mais de plus en plus simples.

Proposition 3 *Si f est définie au voisinage de a, dérivable en a et si* $\boldsymbol{f'(a) \neq 0}$*, alors :*

$$f(x) - f(a) \sim_{x \to a} f'(a)(x - a).$$

En appliquant ce résultat aux fonctions usuelles on obtient les équivalents classiques en 0 :

1. $(\mathrm{e}^x - 1) \sim_0 x$;

[5] Une circonstance bien exceptionnelle, qui provient le plus souvent d'une erreur de calcul, *cf. infra.*

[6] mais pas *toutes* – notamment celles qui font intervenir des sommes ou des différences.

2. $(\ln(1+x)) \sim_0 x$;
3. $((1+x)^\alpha - 1) \sim_0 (\alpha x)$;
4. $(\sin x) \sim_0 x$;
5. $(\tan x) \sim_0 x$;
6. $(\operatorname{sh} x) \sim_0 x$;
7. $(\operatorname{th} x) \sim_0 x$; etc.

D'autre part on a facilement des équivalents en 0 / en $\pm\infty$ des fonctions polynomiales / rationnelles :

Proposition 4 *Si* $P(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + ... + a_q x^q$ *avec* $a_p a_q \neq 0$,

$$P(x) \sim_{x\to 0} a_p x^p \text{ et } P(x) \sim_{x\to\pm\infty} a_q x^q$$

Corollaire 5 *Une fonction rationnelle est équivalente en* 0 *(*resp. $\pm\infty$*) au quotient de ses termes de plus bas (*resp. *haut) degrés.*

4 Fonctions continues sur un intervalle

Dans toute cette partie $\mathcal{D}$ est un intervalle I de $\mathbb{R}$.

L'*intérieur* de I est l'intervalle ouvert de mêmes bornes que I, noté $\mathring{I}$.

Définition 9 $f : I \to \mathbb{R}$ *est* continue sur I *si*

- f *est continue en* a *pour tout* $a \in \mathring{I}$ *;*
- f *est continue à droite en* $\alpha = \inf I$ *(si* $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $\alpha \in I$*) ;*
- f *est continue à gauche en* $\beta = \sup I$ *(si* $\beta \in \mathbb{R}$ *et* $\beta \in I$*).*

On note $\mathcal{C}(I)$ (ou $\mathcal{C}^0(I)$) l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs réelles. D'après le corollaire 1.1 page 3, $\mathcal{C}(I)$ peut être muni des opérations $+$ et $\times$ (ce qui lui confère une structure d'anneau).

La définition de la continuité est *locale* à la base. Mais en la supposant pour tous les points d'un intervalle, on fait apparaître des propriétés nouvelles.

4.1 Cas d'un intervalle quelconque

L'énoncé suivant, sous l'une ou l'autre forme, est certainement la plus importante propriété des fonctions continues :

Théorème 6 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur l'intervalle* I*. Alors*

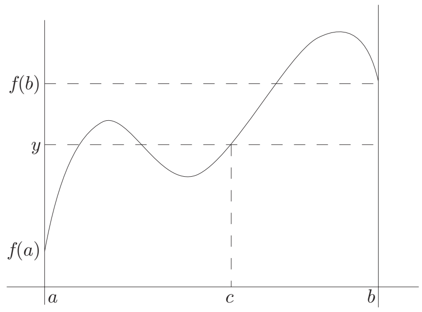
$$f\langle I\rangle \text{ est un intervalle.}$$

Cela équivaut au résultat suivant :

Théorème 7 (des valeurs intermédiaires) *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur l'intervalle* I*. Soient* a, $b \in I$*. Si* $y \in [f(a), f(b)]$*, il existe*[7] $c \in [a,b]$ *tel que*

$$f(c) = y.$$

[7] "Le" point c dont le th. affirme l'existence n'a aucune raison d'être *unique*.



Notons l'important cas particulier suivant, qui permet de prouver qu'une fonction f s'annule même lorsqu'on ne sait pas résoudre explicitement la condition "$f(x) = 0$" :

Corollaire 6 *Si* $f : I \to \mathbb{R}$ *est continue sur l'intervalle* I*, si* a, $b \in I$ *et si* $f(a) f(b) \leq 0$*, il existe* $c \in [a,b]$ *tel que* $f(c) = 0$*.*

On peut p. ex. en déduire, en combinaison avec la prop. 4, que toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

4.2 Cas d'un segment

Lorsque l'intervalle I est un segment, on a en plus les résultats suivants :

Théorème 8 *Soit* f *une fonction* continue *sur le* segment I*. Alors*

1. f *est bornée ;*
2. f *"atteint ses bornes".*

Cela signifie que d'une part, les quantités $m = \inf_I f$ et $M = \sup_I f$ sont définies, et que d'autre part il existe c, $d \in I$ tels que $f(c) = m$ et $f(d) = M$ (ce dernier point étant *admis* pour nous).

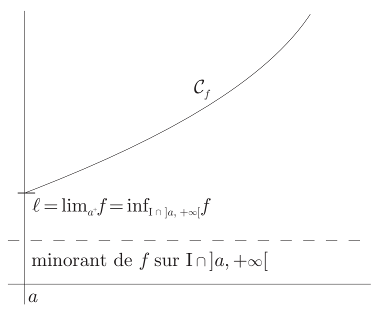
4.3 Rapports entre continuité, monotonie et inversibilité

4.3.1 Fonctions monotones sur un intervalle

Étant donnée la variété des conditions d'étude de limites, il y a une grande diversité de "théorèmes de la limite monotone" pour les fonctions. Par exemple, dans le cas d'une limite à droite en a :

Proposition 5 *Soit* f *définie selon l'hypothèse* $(\mathrm{H}_f(a^+))$*, croissante sur* $\mathcal{D}\cap\ ]a,+\infty[$.

1. *Si* f *est minorée sur* $\mathcal{D}\cap\ ]a,+\infty[$*,* f *admet une limite à droite en* a *et :* $\lim_{a^+} f = \inf\limits_{\mathcal{D}\cap]a,+\infty[} f$ *;*
2. *Si* f *n'est pas minorée sur* $\mathcal{D}\cap\ ]a,+\infty[$*,* f *admet pour limite* $-\infty$ *à droite en* a*.*



Cet énoncé doit bien sûr être adapté dans le cas d'une fonction décroissante, ou d'une limite en a^- / $+\infty$ / $-\infty$.

Si f est croissante sur l'intervalle I et si $a \in I$, f est majorée (*resp.* minorée) par $f(a)$ sur $I \cap\,]-\infty, a[$ (*resp.* $I \cap\,]a, +\infty[$). Par conséquent f admet des limites à gauche et à droite en a notées respectivement $f(a^-)$ et $f(a^+)$[8], et :

$$f\left(a^-\right) \leq f(a) \leq f\left(a^+\right).$$

Ces conclusions s'adaptent facilement au cas d'une fonction décroissante (p. ex. en remplaçant f par $-f$).

Dans le cas d'une fonction monotone sur l'intervalle I, le th. 6 (qui n'est qu'une implication dans le cas général) devient une équivalence :

Théorème 9 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone sur l'intervalle I. Il y a équivalence entre*

1. *f est continue sur I et*
2. *$f\langle I\rangle$ est un intervalle.*

De même, le th. suivant constitue la réciproque d'un résultat ensembliste élémentaire sur les fonctions monotones :

Proposition 6 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et injective sur l'intervalle I. Alors f est strictement monotone sur I.*

4.3.2 Inversion des fonctions continues strictement monotones

Théorème 10 (des fonctions réciproques) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Alors*

1. *$J = f\langle I\rangle$ est un intervalle ;*
2. *f est une bijection de I sur J ;*
3. *$f^{-1} : J \to I$ est bijective de J sur I, strictement monotone de même sens que f et continue sur J.*

On dit dans ce cas que f est un *homéomorphisme* de I sur J.

Exemple 10 *Pour $p \in \mathbb{N}^*$ soit $f_p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. f est continue sur $I = \mathbb{R}_+$. $J = f\langle \mathbb{R}_+\rangle$ est un intervalle inclus dans $\mathbb{R}_+$, contenant 0 ($= f(0)$) et non majoré (puisque f ne l'est pas). Donc $J = \mathbb{R}_+$ et comme f est strictement croissante, f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. L'homéomorphisme réciproque est la* fonction racine $p^{\text{ième}}$ *sur $\mathbb{R}_+$.*

5 Fonctions complexes

On définit une fonction complexe à l'aide de deux fonctions réelles : ses parties réelle et imaginaire. Si $f : I \to \mathbb{C}$ on écrira pour tout x

$$f(x) = g(x) + \mathrm{i}h(x),$$

définissant ainsi deux fonctions g, $h : I \to \mathbb{R}$ notées $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. On définit également la fonction $\bar{f} = g - \mathrm{i}h$ conjuguée de f, et la fonction $|f| = \sqrt{g^2 + h^2}$.

D'une manière générale, $f = g + \mathrm{i}h$ admet la propriété $\mathcal{P}$ *ssi* g et h vérifient $\mathcal{P}$.

[8] Attention, ce ne sont pas les images par f de points de I qui s'appelleraient "a^-" ou "a^+". Ce sont des limites.
On rencontre aussi les notations (contestables) $f(a-0)$ et $f(a+0)$.

5.1 Fonctions bornées

Soit $f : I \to \mathbb{C}$.

Définition 10 *f est* bornée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$: $|f(x)| \leq M$.*

Cette notion peut être caractérisée à l'aide de $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$:

Proposition 7 *La fonction f est bornée* ssi *$\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ le sont.*

5.2 Limites de fonctions

Soit $f : I \to \mathbb{C}$.

Définition 11 *f* admet une limite en *a s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

soit le même énoncé que dans $\mathbb{R}$, $|\cdot|$ signifiant le module. On a de même les autres conditions d'étude de limites[9].

On montre l'unicité de la limite : un seul complexe ℓ peut vérifier l'énoncé ci-dessus, et on note

$$\ell = \lim_a f = \lim_{x \to a} f(x)$$

(*limite de f en a*).

Comme pour la notion de suite bornée, on peut caractériser cette définition à l'aide des parties réelle et imaginaire :

Proposition 8 *Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Notons $g = \mathrm{Re}\, f$, $h = \mathrm{Im}\, f$, $a = \mathrm{Re}\, \ell$ et $b = \mathrm{Im}\, \ell$. Il y a équivalence entre*

1. *$\lim_{\mathcal{B}} f = \ell$ et*
2. *$\lim_{\mathcal{B}} g = a$ et $\lim_{\mathcal{B}} h = b$.*

On en déduit les propriétés algébriques des limites de fonctions complexes.

5.3 Fonctions continues

$f : I \to \mathbb{C}$ est *continue en a* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ce qui équivaut à la continuité en a de $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$. On en déduit les résultats algébriques des fonctions continues complexes.

L'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ (ou $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{C})$). Il est muni d'une addition et d'une multiplication qui lui confèrent une structure d'anneau.

Attention, les démonstrations de certains résultats sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peuvent faire intervenir la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ sans que cela apparaissent explicitement dans leur énoncé. Ces résultats ne s'appliquent pas aux fonctions complexes. C'est notamment le cas du th. des valeurs intermédiaires.

[9] mais pas de *limites infinies*.