PCSI - mathématiques

Fonctions hyperboliques

1 Les fonctions sh et ch

Définition 1 *On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ainsi, ch (*resp.* sh) est la partie paire (*resp.* impaire) de la fonction exponentielle :

$$\begin{cases} \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x : \text{ ch est paire,} \\ \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x : \text{ sh est impaire.} \end{cases}$$

Théorème 1 sh *et* ch *sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :*

$$\operatorname{ch}' = \operatorname{sh} \ ; \ \operatorname{sh}' = \operatorname{ch}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x > 0$ d'où les variations de sh sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}' x$		> 0	1	> 0	
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit le signe de sh sur $\mathbb{R}$ et donc les variations de ch :

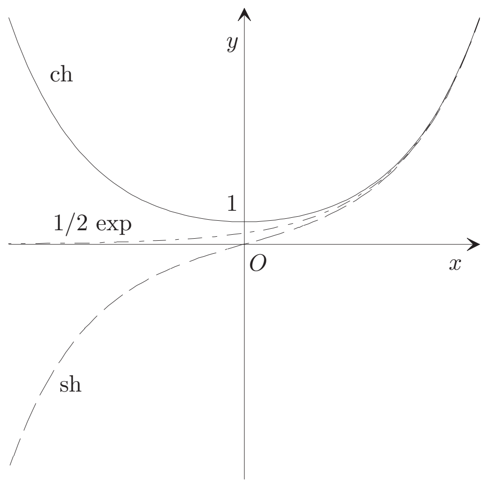
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch}' x$		< 0	0	> 0	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque alors que $\operatorname{ch} x \geq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$ et $e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ donc en multipliant :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

d'où le nom de fonctions *hyperboliques* pour sh et ch qui peuvent être utilisées pour paramétrer une hyperbole équilatère.



fonctions ch, sh et $1/2 \exp$

Formules de trigonométrie hyperbolique

1. formules d'addition :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch}(x-y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sh}(x-y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)) \\ \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)) \\ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y &= \tfrac{1}{2}(\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)) \end{aligned}$$

3. formules de doublement :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 \\ &= 1 + 2\operatorname{sh}^2 x \\ \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x &= \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} \\ \operatorname{sh}^2 x &= \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2} \end{aligned}$$

2 Fonction th

Définition 2 *On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

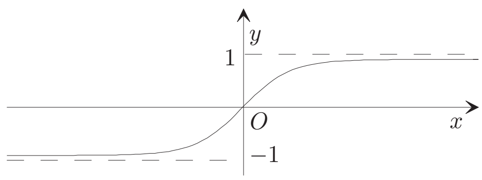
Ainsi th est impaire et du signe de $\operatorname{sh} x$, qui est lui-même du signe de x.

th est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$\operatorname{th}' x = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}$ donc :

$$\operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x > 0$$

d'où $|\operatorname{th} x| < 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{th}' x$		> 0	1	> 0	
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$



fonction th

3 Fonctions hyperboliques inverses

3.1 Fonction argsh

La fonction sh est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{-\infty} \text{sh} = -\infty$, $\lim_{+\infty} \text{sh} = +\infty$. Par suite sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et on peut poser :

Définition 3 $\text{argsh} = \text{sh}^{-1}$
*(*réciproque *de la fonction* sh*).*

argsh est donc une bijection ($\uparrow$) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $y = \text{argsh}\, x \Leftrightarrow \text{sh}\, y = x$. argsh est impaire comme sh.

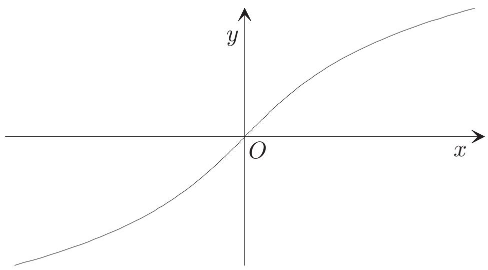
On a donc $\text{sh}\,(\text{argsh}\, x) = x$ d'où

$$\text{ch}\,(\text{argsh}\, x) = +\sqrt{1 + \text{sh}^2\,(\text{argsh}\, x)} = \sqrt{1 + x^2}.$$

Soit alors $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = \text{argsh}\, x$. sh est dérivable en y et $\text{sh}'\, y = \text{ch}\, y > 0$ donc $\neq 0$. Par conséquent argsh est dérivable en x et

$$\text{argsh}'\, x = \frac{1}{\text{sh}'\, y} = \frac{1}{\text{ch}\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

La fonction argsh servira donc notamment à exprimer des primitives.



fonction argsh

3.2 Fonction argch

La fonction ch est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\text{ch}\, 0 = 1$, $\lim_{+\infty} \text{ch} = +\infty$. Par suite ch est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$ et on peut poser :

Définition 4 $\text{argch} = \left(\text{ch}_{|\mathbb{R}_+}\right)^{-1}$
*(*réciproque *de la restriction à* $\mathbb{R}_+$ *de la fonction* ch*).*

argch est alors une bijection ($\uparrow$) de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$:

$$y = \text{argch}\, x \Leftrightarrow \boldsymbol{y > 0} \text{ et } \text{ch}\, y = x.$$

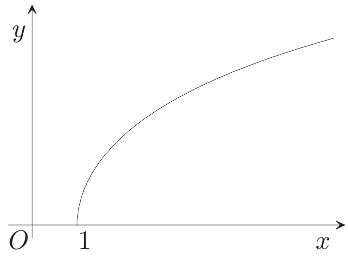
On en déduit $\text{ch}\,(\text{argch}\, x) = x$ d'où

$$\begin{aligned} \text{sh}\,(\text{argch}\, x) &= +\sqrt{\text{ch}^2\,(\text{argch}\, x) - 1} \text{ (car } \text{argch}\, x \geq 0) \\ &= \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned}$$

Soit alors $x \in\ ]1, +\infty[$. Posons $y = \text{argch}\, x$: $y > 0$. ch est dérivable en y et $\text{ch}'\, y = \text{sh}\, y > 0$ (puisque $y > 0$) donc $\neq 0$. Par conséquent argch est dérivable en x et

$$\text{argch}'\, x = \frac{1}{\text{ch}'\, y} = \frac{1}{\text{sh}\, y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

La fonction argch est donc aussi un outil de calcul des primitives.



fonction argch

3.3 Fonction argth

La fonction th est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{-\infty} \text{th} = -1$, $\lim_{+\infty} \text{th} = +1$. Par suite th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et on peut poser :

Définition 5 $\text{argth} = \text{th}^{-1}$
*(*réciproque *de la fonction* th*).*

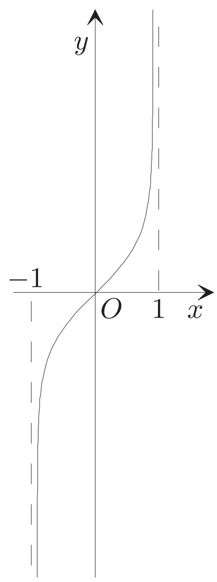
argth est donc une bijection ($\uparrow$) de $]-1, 1[$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in]-1, 1[$: $y = \text{argth}\, x \Leftrightarrow \text{th}\, y = x$.

On a pour tout $x \in\ ]-1, 1[$: $\text{th}\,(\text{argth}\, x) = x$.

Soit alors $x \in]-1, 1[$. Posons $y = \text{argth}\, x$. th est dérivable en y et $\text{th}'\, y = \frac{1}{\text{ch}^2\, y} = 1 - \text{th}^2\, y > 0$ donc $\neq 0$. Par conséquent argth est dérivable en x et

$$\text{argth}'\, x = \frac{1}{\text{th}'\, y} = \frac{1}{1 - \text{th}^2\, y} = \frac{1}{1 - x^2}.$$

Cette expression est fondamentale dans certains calculs de primitives.



fonction argth