PCSI - mathématiques

Fonctions circulaires

1 La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$

On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$$

On a alors : $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| = 1$ pour tout x, $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est dérivable par rapport à x de dérivée $\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$. Par suite, $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout n :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{i}^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.$$

On a en outre :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{\overline{\mathrm{i}x}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x.$$

On en déduit :

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) \text{ et } \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right).$$

2 Les fonctions sin et cos

Définition 1 $\cos x = \operatorname{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ *et* $\sin x = \operatorname{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 1 sin *et* cos *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\cos' = -\sin \;;\; \sin' = \cos.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, $1 = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}$ donc :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$\cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x$ donc :

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x : & \cos \text{ est paire} \\ \sin(-x) = -\sin x : & \sin \text{ est impaire.} \end{cases}$$

$\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,0} = \mathrm{e}^0 = 1$ donc :

$$\cos 0 = 1, \sin 0 = 0.$$

Formules de trigonométrie

1. formules d'addition :

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \cos x \cos y &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(x+y) + \cos(x-y)\right) \\ \sin x \sin y &= \tfrac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right) \\ \sin x \cos y &= \tfrac{1}{2}\left(\sin(x+y) + \sin(x-y)\right) \end{aligned}$$

3. $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$ d'où
$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2\sin x \sin y$ d'où
$\cos p - \cos q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$ d'où
$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

4. formules de doublement :

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ \sin 2x &= 2\sin x \cos x \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2} \\ \sin^2 x &= \frac{1-\cos 2x}{2} \end{aligned}$$

3 Le nombre π

Théorème 2 $A \overset{\text{déf.}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0$ *et* $\cos x = 0\}$ *est non vide et admet un plus petit élément* $\mu > 0$.

Définition 2 *On pose* $\boldsymbol{\pi = 2\mu}$ *où*
$\mu = \min\left(\{x \in \mathbb{R}^+ \mid \cos x = 0\}\right)$ *:* $\pi \in \mathbb{R}$, $\pi > 0$.

3.1 Etude de cos et sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] = [0, \mu]$

Lemme 1 *Pour tout* $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos x > 0$.

Par conséquent, sin est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Comme $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} > 0$. Or $1 = \sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2} + 0$ donc $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$, donc $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin' x = \cos x$		> 0	0
$\sin$	0	$\nearrow$	1
$\cos' x = -\sin x$	0	< 0	
$\cos$	1	$\searrow$	0

On déduit des variations de sin que $\cos' x = -\sin x < 0$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ donc cos $\downarrow$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On a $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = \mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -1$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\right)^2 = 1$.

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{i}(\cos x + \mathrm{i}\sin x) = -\sin x + \mathrm{i}\cos x$. D'où :

$$\begin{aligned} \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= -\sin x = \cos' x \\ \sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos x = \sin' x \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\cos^{(n)} x &= \cos\left(x + \tfrac{n\pi}{2}\right)\\ \sin^{(n)} x &= \sin\left(x + \tfrac{n\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

$e^{i(x+\pi)} = e^{ix}\, e^{i\pi} = -\left(\cos x + i \sin x\right)$ d'où

$$\begin{aligned}\cos\left(x+\pi\right) &= -\cos x\\ \sin\left(x+\pi\right) &= -\sin x\end{aligned}$$

$e^{i(x+2\pi)} = e^{ix}\, e^{2i\pi} = 1(\cos x + i \sin x)$ d'où :

$$\begin{aligned}\cos(x+2\pi) &= \cos x\\ \sin(x+2\pi) &= \sin x\end{aligned}$$

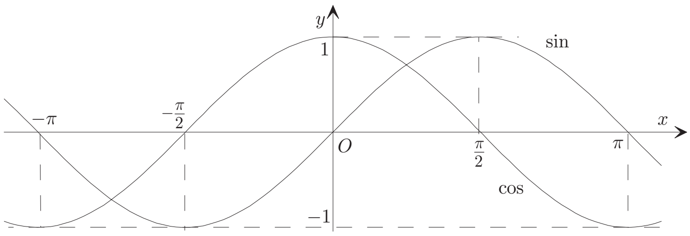
Théorème 3 2π *est période de* $\cos$ *et* $\sin$.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(-x) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-x) = \cos x$
$\cos(\pi - x) = \cos(-x+\pi) = -\cos(-x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin\left(-x+\pi\right) = -\sin(-x) = \sin x$

3.2 Etude de $\cos$ et $\sin$ sur $[0,\, 2\pi]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin' x$		>0	0	<0		<0	0	>0	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\cos' x$	0	<0		<0	0	>0		>0	0
$\cos$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

On déduit de cette étude que 2π est la plus petite période strictement positive, càd la période fondamentale de sin et cos.



fonctions sin et cos

4 Fonctions tangente et cotangente

Pour chaque réel x pour lequel ces expressions sont définies on pose

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \;;\; \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

On a ainsi :
$\mathcal{D}(\tan) = \mathbb{R} - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]\frac{\pi}{2} + (n-1)\pi,\ \frac{\pi}{2} + n\pi[$ et
$\mathcal{D}(\operatorname{cotan}) = \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi, (n+1)\pi[$.

tan et cotan sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs domaines respectifs et : $\tan' x = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$ d'où :

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

N.B. La relation $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ pour $x \in I_k$ est importante en elle-même, et pas seulement en tant qu'expression alternative de la dérivée de tan.

D'autre part $\operatorname{cotan}' x = \frac{-\sin x(-\sin x) - \cos x \cos x}{\sin^2 x}$ donc :

$$\operatorname{cotan}' x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \operatorname{cotan}^2 x\right).$$

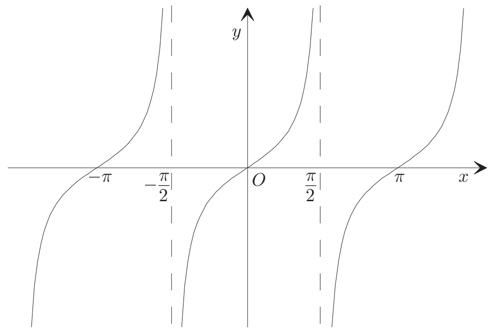
donc tan $\uparrow$, cotan $\downarrow$ sur chaque *intervalle* inclus dans son domaine de définition.

On a $\tan(-x) = -\tan x$, $\operatorname{cotan}(-x) = -\operatorname{cotan} x$ et $\tan(x+\pi) = \tan x$.

4.1 Etude de $\tan$ sur $]-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}[$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$	$\Vert$	>0	1	>0	$\Vert$
$\tan$	$\Vert\ -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty\ \Vert$

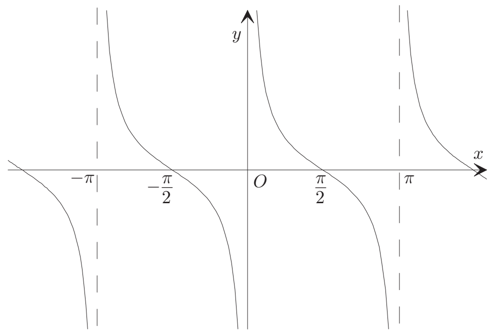
d'où $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x \in a + \pi\mathbb{Z}$



fonction tangente

4.2 Etude de cotan sur $]0,\, \pi[$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\operatorname{cotan}' x$	$\Vert$	<0	-1	<0	$\Vert$
cotan	$\Vert\ +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty\ \Vert$



fonction cotangente

On a $\tan\left(\pi - x\right) = -\tan x$; $\operatorname{cotan}\left(\pi - x\right) = -\operatorname{cotan} x$.
Les fonctions tan et cotan sont reliées par :

$$\begin{aligned}\tan\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \frac{-1}{\tan x} = -\operatorname{cotan} x\\ \tan\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) &= \frac{1}{\tan x} = \operatorname{cotan} x\end{aligned}$$

(donc la fonction cotan “fait double emploi”).

$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$ d'où

$$\tan\left(x+y\right) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

et par conséquent

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

et :

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

$\tan\frac{\pi}{4} = 1$; $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et

$$\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

On a d'autre part les expressions suivantes de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$ en fonction de $t = \tan\frac{x}{2}$ qui sont d'une importance fondamentale dans plusieurs domaines, par exemple les calculs de primitives, parce qu'elles sont *rationnelles.*

Théorème 4 *Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $t = \tan\frac{x}{2}$ soit défini, alors*

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2}, \\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2}. \end{aligned}$$

Enfin $\tan x$ peut s'exprimer à l'aide de $\sin 2x$ et $\cos 2x$:

$$\tan x = \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}.$$

5 Fonctions circulaires inverses

5.1 Fonction arcsin

La fonction sin est continue, strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$. Donc c'est une bijection entre ces deux intervalles, et on peut poser :

Définition 3

$$\arcsin \overset{\text{déf.}}{=} \left(\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$

Ainsi arcsin est une bijection $\uparrow$ de $[-1,1]$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et pour tout $x \in [-1,1]$,

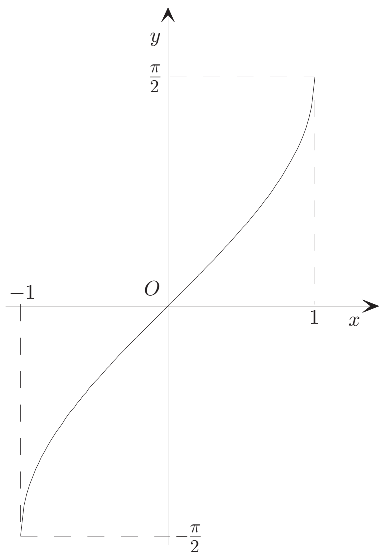
$$y = \arcsin x \Leftrightarrow \boldsymbol{y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \text{ et } \sin y = x.$$

Comme sin, arcsin est impaire. On a $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout $x \in [-1,1]$. Par contre, seulement pour $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arcsin(\sin y) = y$. On vérifie facilement $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Soit $x \in\ ]-1,1[$. Posons $y = \arcsin x$ ($\in\ ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). sin est dérivable en y et $\sin' y = \cos y > 0$ (donc $\neq 0$). Il en résulte que arcsin est dérivable en x et

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette dernière formule donne à la fonction arcsin une partie de son importance pour le calcul de primitives et la résolution d'équations différentielles.



fonction arcsin

5.2 Fonction arccos

La fonction cos est continue, strictement décroissante de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Donc c'est une bijection entre ces deux intervalles, et on peut poser :

Définition 4

$$\arccos \overset{\text{déf.}}{=} \left(\cos_{|[0,\pi]}\right)^{-1}.$$

Ainsi arccos est une bijection $\downarrow$ de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$, et pour tout $x \in [-1,1]$,

$$y = \arccos x \Leftrightarrow \boldsymbol{y \in [0,\pi]} \text{ et } \cos y = x.$$

On a $\cos(\arccos x) = x$ pour tout $x \in [-1,1]$, mais $\arccos(\cos y)$ seulement pour $y \in [0,\pi]$. On vérifie facilement $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1,1]$.

Soit $x \in\ ]-1,1[$. Posons $y = \arccos x$ ($\in\ ]0,\pi[$). cos est dérivable en y et $\cos' y = -\sin y < 0$ (donc $\neq 0$). Il en résulte que arccos est dérivable en x et

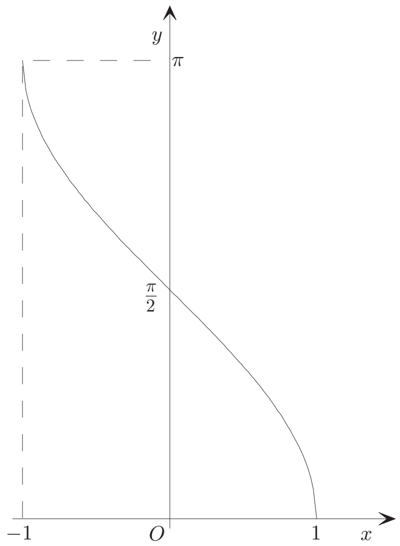
$$\arccos' x = \frac{1}{\cos' y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ce dernier résultat traduit une relation entre les fonctions arccos et arcsin, que l'on peut justifier par dérivation ou par un calcul de trigonométrie direct :

Proposition 1 *Pour tout $x \in [-1,1]$,*

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Ceci rend la fonction arccos un peu redondante par rapport à arcsin.



fonction arccos

5.3 Fonction arctan

La fonction tan est continue, strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Donc c'est une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$ et on peut poser :

Définition 5

$$\arctan \overset{\text{déf.}}{=} \left(\tan_{|]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1}.$$

Alors arctan est une bijection (↑) de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \boldsymbol{y \in \ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} \text{ et } \tan y = x.$$

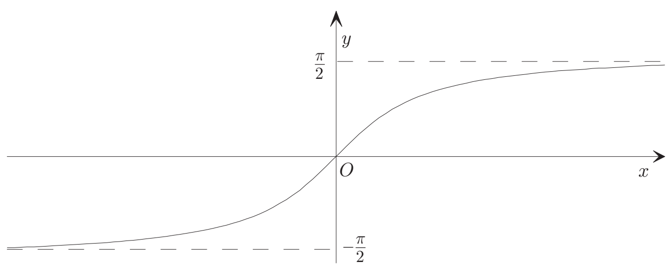
On a $\tan(\arctan x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\arctan(\tan y) = y$ pour $y \in \ ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

arctan est impaire comme tan.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $y = \arctan x$. tan est dérivable en y et $\tan' y = 1 + \tan^2 y > 0$ (donc $\neq 0$). Il s'ensuit que arctan est dérivable en x et

$$\arctan' x = \frac{1}{\tan' y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Cette formule est d'une importance fondamentale pour les calculs de primitives.



fonction arctan