PCSI - mathématiques

Espaces vectoriels euclidiens

Dans tout ce chapitre, le corps de base est $\mathbb{R}$.

1 Espaces préhilbertiens réels

E est un $\mathbb{R}$-ev.

1.1 Produit scalaire

Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est dite

- *bilinéaire* si elle est linéaire par rapport à chaque vecteur, càd si les applications $x \mapsto \varphi(x, y)$ et $y \mapsto \varphi(x, y)$ sont linéaires.
- *symétrique* si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tous x, $y \in E$;
- *définie* si $\varphi(x, x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0_E$;
- *positive* si $\varphi(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.

Définition 1 *Un* produit scalaire *sur E est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive sur E.*

Notation 1 *Si φ est un produit scalaire sur E on écrit $\varphi(x, y) = (x \mid y)$ (lire "x scalaire y").*

Exemple 1

- *Sur $\mathbb{R}^n$ si $x = \left(x^1, ..., x^n\right)$ et $y = \left(y^1, ..., y^n\right)$*

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

(produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$).

- *$(f \mid g) = \int_a^b fg$ sur $\mathcal{C}^0([a, b])$ (mais pas sur* $\mathrm{Int}([a, b], \mathbb{R})$*).*
- *Si a_0, ..., a_n sont $n + 1$ réels distincts, $(P \mid Q) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) Q(a_i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ (mais pas sur $\mathbb{R}[X]$).*

Un produit scalaire se développe comme un produit de réels : $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i x_i \mid \sum_{j=1}^{p} \mu^j y_j\right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \lambda^i \mu^j (x_i \mid y_j)$.

1.2 Théorème de Schwarz

Théorème 1 (inégalité de Schwarz) *Si $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur E on a pour tous x, $y \in E$*

$$(x \mid y)^2 \leq (x \mid x)(y \mid y).$$

Corollaire 1 (inégalité de Minkowski) *Si $(\cdot \mid \cdot)$ est un produit scalaire sur E on a pour tous x, $y \in E$*

$$\sqrt{(x + y \mid x + y)} \leq \sqrt{(x \mid x)} + \sqrt{(y \mid y)}.$$

1.3 Norme euclidienne

Si E est un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ on pose pour tout $x \in E$

$$\|x\| = \sqrt{(x \mid x)}$$

(*norme euclidienne* du vecteur x). Elle vérifie

(N1) $\|x\| \in \mathbb{R}_+$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$;
(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$;
(N3) (inégalité triangulaire) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

qui sont les trois axiomes de norme pour un $\mathbb{R}$-ev.

L'inégalité triangulaire n'est autre que la relation de Minkowski ; le théorème de Schwarz peut se réécrire :

$$|(x \mid y)| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

En outre, on prouve facilement

- $(x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$ (identité de polarisation) ;
- $(x \mid y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$ (identité de polarisation, 2ème forme) ;
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ (identité de la médiane ou du parallélogramme) ;
- $(x \mid y) = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (théorème de Pythagore).

Définition 2

- *Un* espace préhilbertien réel *est un $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.*
- *Un* espace euclidien réel *est un espace préhilbertien de dimension finie.*

Dans toute la suite, on désignera par E_n un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$.

2 Orthogonalité

Définition 3 *Si x, $y \in E_n$, x est* orthogonal *à y si $(x \mid y) = 0$. On le note $x \perp y$.*

Il résulte immédiatement de cette définition que $x \perp y$ *ssi* $y \perp x$ (et on pourra dire "x et y sont orthogonaux"). On note aussi que le vecteur nul est l'unique vecteur orthogonal à lui-même (en fait, à tout autre vecteur de E_n).

2.1 Familles orthogonales, orthonormales

Définition 4 *Une famille $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ de vecteurs de E_n est*

- orthogonale *si $i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j$;*
- orthonormale *si $(x_i \mid x_j) = \delta_{i,j}$ quels que soient les indices i, $j \in [\![1, n]\!]$.*

Une famille ON est donc un cas spécial de famille OG. Notons que rien n'empêche le vecteur nul de figurer dans une famille OG (et alors, bien sûr, celle-ci est liée).

Dans le cas contraire on peut énoncer

Proposition 1 *Si $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ est une famille OG de vecteurs* non nuls *de E_n, alors elle est libre.*

En particulier, toute famille ON est libre.

Une famille OG (*resp.* ON) qui est également une base de E_n est appelée *base orthogonale* (*resp. orthonormale*).

Exemple 2 *Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ est orthonormale.*

En dehors de ce cas, l'existence de bases OG ou ON dans les $\mathbb{R}$-ev euclidiens est loin d'être évidente. Les deux questions reviennent au même en vertu de

Proposition 2 *Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une BOG de E_n, $\left(\frac{1}{\|x_i\|}x_i\right)_{1\leq i\leq n}$ est une BON de E_n.*

L'intérêt des BON est de simplifier les calculs de produit scalaire et de norme euclidienne : si $\mathcal{B} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une BON de E_n et si $x = \sum_{i=1}^n x^i u_i$, $y = \sum_{i=1}^n y^i u_i \in E_n$,

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x^i y^i \text{ et } \|x\| = \left(\sum_{i=1}^n \left(x^i\right)^2\right)^{1/2}$$

soit les mêmes expressions que dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique. Une fois leur existence acquise, on pourra donc dire que tout $\mathbb{R}$-ev euclidien (muni d'une BON) "fonctionne" comme $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

Par ailleurs, dans une BON, le calcul des coordonnées d'un vecteur est facilité : dans les mêmes conditions que ci-dessus,

$$x = \sum_{i=1}^n (x \mid u_i)\, u_i \tag{1}$$

autrement dit, $x^i = u^{*i}(x) = (x \mid u_i)$ ne dépend *que* du vecteur u_i — ce qui est faux dans une base quelconque.

2.2 Orthogonal d'un vecteur, d'une partie

Soit $a \in E_n$.

Définition 5 *L'*orthogonal *de a est*

$$a^\perp = \{x \in E_n \mid x \perp a\}.$$

Il est immédiat que $a^\perp$ est un sev de E_n. Si $a = 0_{E_n}$, $a^\perp = E_n$. Dans tous les autres cas, on a le résultat suivant, facile mais important :

Lemme 1 *Soit $a \in E_n$, $a \neq 0_{E_n}$. Alors $a^\perp$ est un* hyperplan *de E_n et de plus*

$$E_n = a^\perp \oplus_\perp \mathbb{R}a.$$

Ce lemme permet p. ex. de préciser les cas d'égalité dans la relation de Schwarz :

Proposition 3 *Si x, $y \in E_n$, $|(x \mid y)| = \|x\|\,\|y\|$* ssi *la famille (x, y) est liée.*

Soit maintenant P une partie (quelconque) de E_n.

Définition 6 *L'*orthogonal *de P est*

$$P^\perp = \{x \in E_n \mid \forall y \in P,\ x \perp y\}.$$

On a donc généralisé la définition 5. puisque $a^\perp = \{a\}^\perp$. La relation $P^\perp = \bigcap_{y\in P} y^\perp$ montre que $P^\perp$ est toujours un sev de E_n (même si P n'est pas un).

On vérifie facilement

- $E_n^\perp = \{0_{E_n}\}$, $\{0_{E_n}\}^\perp = E_n$;
- $P \subset Q \Rightarrow Q^\perp \subset P^\perp$;
- $P \subset P^{\perp\,\perp}$.

2.3 Existence de BOG, BON et conséquences

Toute base de E_n peut servir de point de départ à la construction d'une BOG grâce au procédé suivant :

Théorème 2 (orthogonalisation de Schmidt) *Soit $(x_1, ..., x_n)$ une base (quelconque) du $\mathbb{R}$-ev euclidien E_n. Il existe une* base orthogonale *$\mathcal{B} = (a_1, ..., a_n)$ de E_n telle que pour $p = 1, ..., n$*

$$\langle a_1, ..., a_p\rangle = \langle x_1, ..., x_p\rangle.$$

Corollaire 2 *Tout espace vectoriel euclidien admet des bases OG (*resp. *ON).*

Dans le cas d'un sev F de E_n, l'orthogonal de F fournit un supplémentaire privilégié et important de F :

Théorème 3 (de décomposition orthogonale) *Si F est un sev du $\mathbb{R}$-ev euclidien E_n,*

$$E_n = F \oplus_\perp F^\perp.$$

La propriété 1. apparaît alors comme un cas particulier de ce théorème. À partir de ce résultat, on peut énoncer un "théorème de la BOG (*resp.* BON) incomplète".

On en déduit également

Proposition 4 *Si F est un sev de E_n,*

1. $\dim F^\perp = n - \dim F$;
2. $F^{\perp\,\perp} = F$.

Représentation des formes linéaires

Une *forme linéaire* sur E_n est une application linéaire de E_n dans $\mathbb{R}$. L'espace $L(E_n, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E_n est le *dual* de E_n noté E_n^*. Ses éléments admettent une représentation particulièrement simple dans le cas des espaces euclidiens : une forme linéaire sur E_n est "le produit scalaire avec un unique vecteur", càd :

Théorème 4 *Soit $\varphi \in E_n^*$ une forme linéaire sur E_n.* Il existe *un* unique *vecteur $a \in E_n$ tel que $\varphi = (a \mid \cdot)$, càd pour tout $x \in E_n$,*

$$\varphi(x) = (a \mid x).$$

2.4 Projections et symétries orthogonales

Écrivons la définition d'une projection (*resp.* symétrie) vectorielle en prenant comme supplémentaire particulier l'orthogonal. Soit F un sev de E_n. Un vecteur x se décompose sur la somme directe orthogonale :

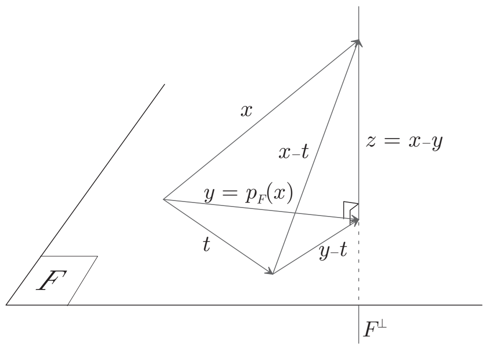
$$\begin{array}{ccccc} E_n & = & F & \oplus_\perp & F^\perp \\ x & = & y & + & z \end{array}$$

Définition 7 *On pose* $p_F(x) = y$ *(*resp. $s_F(x) = y - z$*).* p_F *(*resp. s_F*) est la* projection *(*resp. symétrie*)* orthogonale *sur* F *(*resp. par rapport à F*).*

Rappelons que ce sont des endomorphismes de E_n, que $p_F \circ p_F = p_F$ et $s_F \circ s_F = \mathrm{Id}_{E_n}$ (d'où $s_F \in GL(E_n)$).

Distance d'un vecteur à un sev

F est un sev de E_n, p_F est la projection orthogonale sur F. Soit $x \in E$ et notons $y = p_F(x)$ et $z = x - y$ ($\in F^\perp$).



- Soit $t \in F$. On décompose $x - t = \underbrace{x - y}_{\in F^\perp} + \underbrace{y - t}_{\in F}$ donc (Pythagore)
$$\|x - t\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - t\|^2 \tag{2}$$
d'où $\|x - t\| \geq \|x - y\|$. Ainsi
$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \min\left(\|x - t\| \mid t \in F\right) \\ &= \inf\left(\|x - t\| \mid t \in F\right) = d(x\,;\,F). \end{aligned}$$
- D'autre part si un vecteur t de F vérifie $\|x - t\| = d(x\,;\,F) = \|x - y\|$, alors l'égalité (2) montre que $\|y - t\| = 0$ donc $t = y$.

On conclut

Proposition 5 $y = p_F(x)$ *est l'unique vecteur de* F *qui réalise la distance de* x *à* F*.*

Remarque 1 Pythagore *montre également que la symétrie* s_F *vérifie, avec les mêmes notations :* $\|s_F(x)\|^2 = \|y\|^2 + \|-z\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$ *donc* $\|s_F(x)\| = \|x\|$*.*

L'expression du projeté orthogonal de x sur F est facile à obtenir dans une BOG :

Proposition 6 *Si* $(a_1, ..., a_p)$ *est une BOG de* F *et si* $x \in E_n$*, le projeté orthogonal* $p_F(x)$ *de* x *sur* F *est*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x \mid a_i)}{\|a_i\|^2}\, a_i.$$

Si la base est ON alors $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x \mid a_i)\, a_i$ — comparer avec la formule (1).

3 Endomorphismes et matrices OG

3.1 Endomorphismes orthogonaux

Soit $f \in L(E_n)$.

Définition 8 f *est un* endomorphisme orthogonal *de* E_n *si pour tous* $x, y \in E_n$ *:* $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$*.*

On dit que f conserve le produit scalaire. Donnons d'emblée deux caractérisations de cette notion afin d'en identifier plus facilement des exemples :

Proposition 7 $f \in L(E_n)$ *est un endomorphisme orthogonal* ssi $\|f(x)\| = \|x\|$ *pour tout* $x \in E_n$*.*

On voit donc que les symétries orthogonales (dont $\pm \mathrm{Id}_{E_n}$) sont des endomorphismes orthogonaux.

Attention ! Une projection orthogonale *n'est pas*, en général, un endomorphisme orthogonal.

Proposition 8 *Soient* $f \in L(E_n)$ *et* $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ *une BON de* E_n*.* f *est orthogonal* ssi $(f(u_1), ..., f(u_n))$ *est une BON de* E_n*.*

Notation 2 *On note* $\mathcal{O}(E_n)$ *l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de* E_n*.*

Un endomorphisme orthogonal est nécessairement un automorphisme de E_n. Plus précisément :

Proposition 9 $\mathcal{O}(E_n)$ *est un groupe pour* $\circ$ *(sg de* $GL(E_n)$*).*

$\mathcal{O}(E_n)$ est le *groupe orthogonal* de E_n.

3.2 Matrices orthogonales

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Définition 9 A *est une* matrice orthogonale *si*

$${}^tA\ A = A\ {}^tA = I_n. \tag{3}$$

Cela signifie que A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.

Exemple 3 I_n*,* $-I_n$ *sont des matrices orthogonales.*

En prenant le déterminant de la relation (3) on vérifie immédiatement :

Proposition 10 *Si* A *est une matrice orthogonale,* $\det(A) = \pm 1$.

Ainsi toute matrice orthogonale est inversible. On pose

Définition 10

1. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tA\ A = A\ {}^tA = I_n\}$ *(*groupe orthogonal *d'indice* n*),*
2. $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = +1\}$ *(*groupe spécial orthogonal *d'indice* n*).*

Proposition 11

1. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *est un groupe pour* $\times$ *(sg de* $GL_n(\mathrm{R})$*),*
2. $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ *est un sg de* $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$*.*

Nous sommes maintenant en mesure de relier cette notion à la précédente.

Proposition 12 *Soient* $\mathcal{B} = (u_1, .., u_n)$ *une base* ON *de* E_n *et* $x_1, \ldots, x_n \in E_n$. *Notons* $A = \mathrm{mat}(x_1, ..., x_n ; \mathcal{B})$. *Alors* A *est une matrice orthogonale* ssi $(x_1, ..., x_n)$ *est une BON de* E_n.

Dans ce cas, A est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}' = (x_1, ..., x_n)$. Ceci fournit une première interprétation des matrices orthogonales : ce sont les matrices de passage *entre bases ON.*

Proposition 13 *Soient* $\mathcal{B} = (u_1, .., u_n)$ *une base* ON *de* E_n *et* $f \in L(E_n)$. *Notons* $A = \mathrm{mat}(f ; \mathcal{B})$. *Alors* A *est une matrice orthogonale* ssi f *est un endomorphisme orthogonal de* E_n.

Ainsi, les matrices orthogonales sont d'autre part les matrices représentatives *dans les BON* des endomorphismes orthogonaux de E_n.

Avec cette dernière remarque, revenons à $\mathcal{O}(E_n)$:

Proposition 14 *Si* $f \in \mathcal{O}(E_n)$, $\det f = \pm 1$.

On pose alors $\mathcal{O}_+ (E_n) = \{f \in \mathcal{O}(E_n) \mid \det f = +1\}$ (aussi noté $\mathcal{SO}(E_n)$) : *groupe spécial orthogonal* de E_n, ou groupe des *rotations* de E_n. $\mathcal{SO}(E_n)$ est un groupe pour la loi $\circ$ (sg de $\mathcal{O}(E_n)$). Il n'en est pas de même de $\mathcal{O}_- (E_n) = \{f \in \mathcal{O}(E_n) \mid \det f = -1\}$, ensemble des isométries *indirectes* de E_n.

Cherchons maintenant d'autres exemples d'endomorphismes et de matrices orthogonaux, en nous limitant aux dimensions 2 et 3.

3.3 Etude de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O}(E_2)$

3.3.1 Détermination de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculons le produit ${}^tAA$: ${}^tAA = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{smallmatrix}\right)$. Par conséquent :

$$A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 1 & \text{(a)} \\ ac+bd = 0 & \text{(b)} \\ c^2+d^2 = 1 & \text{(c)} \end{cases}$$

(a) donne l'existence d'un réel θ tel que $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.

(b) peut s'écrire $\left|\begin{smallmatrix} c & -b \\ d & a \end{smallmatrix}\right| = 0$ ce qui montre que la famille $\left(\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right)\right)$ est liée, donc il existe un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right) = \lambda \left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -\lambda\sin\theta \\ \lambda\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ donc $c = -\lambda\sin\theta$ et $d = \lambda\cos\theta$.

(c) donne $\lambda^2 = 1$. On se rend compte de toute façon que $\lambda = \det A$, nécessairement égal à ± 1. Par conséquent,

- si $\det A = +1$ ($A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$), $A = P_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$;
- si $\det A = -1$, $A = N_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, on vérifie bien sûr que P_θ et N_θ appartiennent à $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$. En conclusion :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) &= \{P_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{N_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}, \\ \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) &= \{P_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Remarque 2 $P_\theta P_\varphi = P_{\theta+\varphi}$, *ce qui signifie que l'application* $\theta \mapsto P_\theta$ *est un morphisme de groupes (surjectif) de* $(\mathbb{R}, +)$ *sur* $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$. *En particulier ce dernier est* commutatif.

3.3.2 Etude de $\mathcal{O}(E_2)$

Soit f un endomorphisme orthogonal de E_2. Fixons une base ON $\mathcal{B} = (u, v)$ de E_2.

1^er^ cas $\det f = +1$ (f rotation)

Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{mat}(f ; \mathcal{B}) = P_\theta$. Cherchons les vecteurs $x \in E_2$ non nuls et colinéaires à leur image par f : $f(x) = \lambda x$, ou encore $(f - \lambda \,\mathrm{Id}_{E_2})(x) = 0_{E_2}$. Cela ne peut se produire que si $f - \lambda\,\mathrm{Id}_{E_2}$ n'est pas injectif, càd :

$$\begin{aligned} 0 &= \det(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{E_2}) = \det(P_\theta - \lambda I_2) \\ &= \left|\begin{smallmatrix} \cos\theta-\lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta-\lambda \end{smallmatrix}\right| \\ &= (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = \lambda^2 - 2\lambda\cos\theta + 1 \end{aligned}$$

Le discriminant (réduit) de ce trinôme en λ est $\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta \leq 0$; il ne peut être ≥ 0 (en fait, nul) que lorsque $\sin\theta = 0$ càd $\cos\theta = \pm 1$ ou encore $\theta = 0$ ou π $(\mathrm{mod}\, 2\pi)$. En somme :

- Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, $P_\theta = I_2$ et $f = \mathrm{Id}_{E_2}$;
- Si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$, $P_\theta = -I_2$ et $f = -\mathrm{Id}_{E_2}$;
- Si $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$, $f(x)$ n'est pas colinéaire à x si $x \neq 0_{E_2}$.

2^ème^ cas $\det f = -1$

Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{mat}(f ; \mathcal{B}) = N_\theta$. Alors selon le même raisonnement :

$$\begin{aligned} 0 &= \det(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{E_2}) = \det(N_\theta - \lambda I_2) \\ &= \left|\begin{smallmatrix} \cos\theta-\lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta-\lambda \end{smallmatrix}\right| \\ &= (-\lambda)^2 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1). \end{aligned}$$

On peut donc fixer des vecteurs a et b unitaires tels que $f(a) = a$ et $f(b) = -b$.

Lemme 2 $a \perp b$.

Alors (a, b) est une BON de E_2 et $\mathrm{mat}(f ; (a, b)) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) = N_0$. On reconnaît que f est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}a$.

3.4 Etude de $\mathcal{O}(E_3)$

En dimension 3 nous ne cherchons pas à décrire toutes les matrices orthogonales. Soit $f \in \mathcal{O}(E_3)$; essayons de décrire f à l'aide d'une matrice représentative "simple".

Fixons une base ON $\mathcal{B} = (u, v, w)$ de E_3. Alors $\mathrm{mat}(f ; \mathcal{B}) \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

1^er^ cas $\det f = +1$ (f rotation)

Vérifions quelques résultats préliminaires :

Lemme 3

1. *Il existe un vecteur unitaire* $a \in E_3$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que* $f(a) = \lambda a$,
2. λ *vaut nécessairement* ± 1.

Notons $D = \mathbb{R}a$ la droite engendrée par a et $P = D^\perp$.

Lemme 4

1. P *est stable par* f *et* $g = f_{|_P} \in \mathcal{O}(P)$,
2. $\det f = \lambda \det g$.

- **Si $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{1}$**, g est une rotation de P et si (b,c) est une BON de P, $\mathrm{mat}\,(g\ ;\ (b,c)) = P_\theta$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$ d'où (a,b,c) est une BON de E_3 et la matrice de f dans la base (a,b,c) est : $\left(\begin{array}{c|c} 1 & (0) \\ \hline (0) & P_\theta \end{array}\right)$.
- **Si $\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{1}$**, g est une symétrie orthogonale de P et il existe une base (b,c) de P où $\mathrm{mat}\,(g\ ;\ (b,c)) = N_0$. Alors $\mathrm{mat}\,(f\ ;\ (a,b,c)) = \left(\begin{array}{c|c} -1 & (0) \\ \hline (0) & N_0 \end{array}\right)$ ou encore $\mathrm{mat}\,(f\ ;\ (b,a,c)) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & (0) \\ \hline (0) & P_\pi \end{array}\right)$.

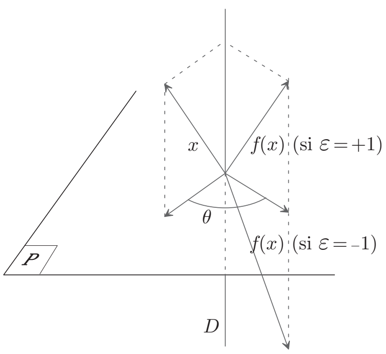
En conclusion partielle, si $\det f = 1$, il existe un réel θ et une BON $\mathcal{B}'$ de E_3 tels que $\mathrm{mat}\,(f\ ;\ \mathcal{B}') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & (0) \\ \hline (0) & P_\theta \end{array}\right)$.

2ème cas $\det f = -1$

Alors $\det(-f) = (-1)^3 \det f = -\det f = +1$ donc dans une certaine BON de E_3, $-f$ a pour matrice $\left(\begin{array}{c|c} 1 & (0) \\ \hline (0) & P_\theta \end{array}\right)$ et donc f a pour matrice $\left(\begin{array}{c|c} -1 & (0) \\ \hline (0) & -P_\theta \end{array}\right)$ ou encore $\left(\begin{array}{c|c} -1 & (0) \\ \hline (0) & P_{\theta+\pi} \end{array}\right)$. On conclut globalement :

Théorème 5 *Si $f \in \mathcal{O}(E_3)$ et $\varepsilon = \det f$ $(= \pm 1)$, il existe une BON $\mathcal{B}'$ de E_3 et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\mathrm{mat}\,(f\ ;\ \mathcal{B}') = \left(\begin{array}{c|c} \varepsilon & (0) \\ \hline (0) & P_\theta \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right).$$



4 EV euclidiens orientés

Rappelons que deux bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ d'un $\mathbb{R}$-ev E sont de même sens si $\det_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) > 0$ (noté $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$). La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence qui partage l'ensemble des bases de E en *deux* classes. *Orienter* E consiste à choisir l'une de ces deux classes, appelée classe des *bases directes* de E. $\mathbb{R}^n$ admet une orientation canonique (celle pour laquelle la base canonique est directe).

Dans la suite on désigne par E_n un $\mathbb{R}$-ev euclidien *orienté* de dimension n.

4.1 Produit mixte

Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sont deux BON de E_n.

Lemme 5 $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \pm 1$.

Corollaire 3 $\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = +1$.

Corollaire 4 *Si $(x_1, ..., x_n)$ est une famille de vecteurs de E_n, $\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$ est* le même *dans* toute *base* orthonormale directe *$\mathcal{B}$ de E_n.*

On peut alors poser :

Définition 11 *Le* produit mixte *de $(x_1, ..., x_n)$ est*

$$\mathrm{Det}\,(x_1, ..., x_n) = [x_1, ..., x_n] = \det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$$

où $\mathcal{B}$ est une BOND (quelconque) de E_n.

Ainsi, le produit mixte a toutes les propriétés du déterminant dans une base. C'est donc une forme n-linéaire alternée de $(x_1, ..., x_n)$. En outre, $(x_1, ..., x_n)$ est une *base directe* de E_n ssi $\mathrm{Det}\,(x_1, ..., x_n) > 0$.

4.2 EV euclidiens orientés de dimension 2

Rappelons que $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif.

Lemme 6 *Si $f \in \mathcal{SO}(E_2)$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (unique modulo 2π) tel que f ait pour matrice P_θ dans* toute *BON* directe *de E_2.*

Ce lemme, déduit de la remarque 2, permet de poser :

Définition 12 *Si $\theta \in \mathbb{R}$, la* rotation d'angle θ *est l'unique isométrie directe de E_2 dont la matrice est P_θ dans toute BOND de E_2.*

Notons que θ n'est défini que modulo 2π.

Angle orienté de deux vecteurs non nuls

Soient x, y deux vecteurs *non nuls* de E_2.

Définition 13 *L'*angle orienté *de x et y est le réel θ, défini modulo 2π, tel que $\frac{1}{\|x\|}x$ ait pour image $\frac{1}{\|y\|}y$ dans la rotation d'angle θ.*

Notation 3 *On écrit $\theta = (\widehat{x,y})$.*

On vérifie les relations suivantes (modulo 2π) :
- $(\widehat{x,y}) + (\widehat{y,z}) = (\widehat{x,z})$;
- $(\widehat{y,x}) = -(\widehat{x,y})$;
- (x,y) liée $\Leftrightarrow (\widehat{x,y}) = 0$ ou π ;
- $x \perp y \Leftrightarrow (\widehat{x,y}) = \frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$.

$\theta = (\widehat{x,y})$ peut être calculé en général grâce à

Proposition 15 *Si x, $y \in E_2 - \{0_{E_2}\}$ et si $\theta = (\widehat{x,y})$,*

$$\begin{array}{rcl} (x \mid y) & = & \|x\|\,\|y\|\cos\theta \\ \mathrm{Det}\,(x,y) & = & \|x\|\,\|y\|\sin\theta \end{array}$$

Cette dernière relation montre que $|\mathrm{Det}\,(x,y)|$ peut s'interpréter comme "l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs x et y".

4.3 EV euclidiens orientés de dimension 3

La définition du produit mixte reste la même. On peut préciser le théorème 5. :

Théorème 6 *Si $f \in \mathcal{O}(E_3)$ et $\varepsilon = \det f$ $(= \pm 1)$, il existe une BON* directe *$\mathcal{B}'$ de E_3 et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\mathrm{mat}\,(f\ ;\ \mathcal{B}') = \left(\begin{array}{c|cc} \varepsilon & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array}\right).$$

Produit vectoriel de 2 vecteurs

Soient $x,\ y \in E_3$. L'application $z \mapsto \mathrm{Det}\,(x,y,z)$ est linéaire de E_3 dans $\mathbb{R}$: c'est une forme linéaire sur E_3. Il existe donc (th. 4.) un (unique) vecteur b de E_3 tel que $\mathrm{Det}\,(x,y,z) = (b \mid z)$ pour tout $z \in E_3$.

Définition 14 *b est le* produit vectoriel *des vecteurs x et y noté $x \wedge y$.*

$x \wedge y$ est donc *caractérisé* par

$$\mathrm{Det}\,(x,y,z) = (x \wedge y \mid z)$$

pour tout $z \in E_3$ (d'où le terme de "produit mixte").

Les propriétés algébriques du produit vectoriel sont regroupées dans la proposition suivante :

Proposition 16 *$x,\ y$ étant des vecteurs de E_3,*

1. *$(x,y) \mapsto x \wedge y$ est bilinéaire ;*
2. *$x \wedge y \perp x$; $x \wedge y \perp y$;*
3. *$y \wedge x = -x \wedge y$;*
4. *$x \wedge y = 0_{E_3} \Leftrightarrow (x,y)$ liée ;*
5. *Si (x,y) est libre, $(x,y,x \wedge y)$ est une* base directe *de E_3 ;*
6. *Si (x,y) engendre un plan P, $P^{\perp} = \mathbb{R}\,(x \wedge y)$.*

Les coordonnées du produit vectoriel se calculent facilement dans une BOND de E_3. Soit $\mathcal{B} = (u,v,w)$ une telle base, et soient deux vecteurs $x = x^1 u + x^2 v + x^3 w$ et $y = y^1 u + y^2 v + y^3 w$ de E_3. On peut alors calculer :

Proposition 17

$$\begin{aligned} x \wedge y &= \begin{vmatrix} x^2 & y^2 \\ x^3 & y^3 \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} x^3 & y^3 \\ x^1 & y^1 \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} w \\ &= \text{“}\begin{vmatrix} x^1 & y^1 & u \\ x^2 & y^2 & v \\ x^3 & y^3 & w \end{vmatrix}\text{”} \end{aligned}$$

(déterminant symbolique que l'on développe obligatoirement par rapport à la $3^{ème}$ colonne).

Le résultat est particulièrement simple lorsqu'on l'applique aux vecteurs de la base OND eux-mêmes :

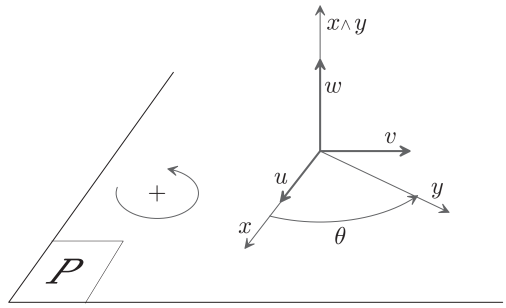
Remarque 3 *Si (u,v,w) est une BOND de E_3,*

$$u \wedge v = w,\ v \wedge w = u,\ w \wedge u = v.$$

Mais pour juger de la disposition géométrique de $x \wedge y$ par rapport à x et y, il vaut mieux calculer dans une BOND adaptée.

Envisageons le cas de deux vecteurs x et y *non nuls.* Fixons un plan[1] P contenant x et y. Choisissons un vecteur w unitaire et orthogonal à P, et munissons P de l'orientation induite par l'orientation de E_3 et le choix de w. Rappelons que celle-ci est caractérisée par la propriété suivante : une base (a,b) est directe dans P *ssi* la base (a,b,w) est directe dans E_3.

[1] Nécessairement $P = \langle x,y \rangle$ si (x,y) est libre (P est alors unique), mais P existe même si x et y sont colinéaires.



Posons $u = \frac{1}{\|x\|}x$ et soit v l'unique vecteur de P tel que (u,v) soit une BOND de P. Alors (u,v,w) est une BON de E_3, qui est directe d'après la convention d'orientation du plan P.

Notons θ l'angle orienté des vecteurs x et y (dans le plan P) : $\theta = (\widehat{x,y})$. Si r est la rotation d'angle θ on a donc $r\,(u) = r\left(\frac{1}{\|x\|}x\right) = \frac{1}{\|y\|}y$. D'autre part, r a pour matrice P_θ dans toute BOND de P, en particulier dans (u,v) : $\mathrm{mat}\,(r\ ;\ (u,v)) = P_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. On en déduit que l'image de u par r (qui est donnée par la première colonne de P_θ) vaut $r\,(u) = \cos\theta\ u + \sin\theta\ v = \frac{1}{\|y\|}y$ d'où

$$y = \|y\|\,(\cos\theta\ u + \sin\theta\ v)$$

(et bien sûr $x = \|x\|\,u$).

On calcule alors le produit vectoriel $x \wedge y$ dans la BOND (u,v,w) de E_3 :

Proposition 18 *Sous les hypothèses précédentes*

$$\begin{aligned} (x \mid y) &= \|x\|\,\|y\|\cos\theta \ \textit{(rappel)} \\ x \wedge y &= \|x\|\,\|y\|\sin\theta\ w \end{aligned}$$

On en déduit que $\|x \wedge y\| = \|x\|\,\|y\|\,|\sin\theta|$; cette norme est maximale ($\|x\|$ et $\|y\|$ étant fixées) lorsque $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, càd lorsque $x \perp y$.

4.4 Complément

On peut mettre à profit la notion de produit vectoriel pour exprimer les rotations de E_3. En dimension 3, la notion de "rotation d'angle θ" n'a pas de sens. Il faut d'abord orienter (en choisissant un vecteur directeur w) l'axe de la rotation, et munir le plan orthogonal de l'orientation induite comme au paragraphe précédent. Si w est changé en son opposé, θ également.

Soit donc r une rotation de E_3 d'angle θ et d'axe dirigé et orienté par le vecteur unitaire w.

Lemme 7 *Si y est un vecteur orthogonal à w,*

$$r\,(y) = \cos\theta\ y + \sin\theta\ w \wedge y.$$

On peut en déduire facilement une expression de l'image de tout vecteur x de E_3 en remarquant que si x est un vecteur quelconque et $y = x - (x \mid w)\,w$, $y \perp w$ d'où l'expression générale de la rotation r :

$$\begin{aligned} r\,(x) &= (x \mid w)\,r\,(w) + r\,(y) \\ &= (x \mid w)\,w + \cos\theta\ y + \sin\theta\ w \wedge y \\ &= \cos\theta\ x + (1-\cos\theta)\,(x \mid w)\,w + \sin\theta\ w \wedge x. \end{aligned}$$