PCSI - mathématiques

Espaces vectoriels

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités

Définition 1 *Un* espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ *est un triplet* $(E,+,.)$ *où* $(E,+)$ *est un groupe abélien et*

$$\begin{array}{rccc} . : & \mathbb{K}\times E & \to & E \\ & (\lambda,x) & \mapsto & \lambda.x \end{array}$$

une loi de composition externe à opérateur dans $\mathbb{K}$ *telle que pour tous* x, $y\in E$ *et* λ, $\mu\in\mathbb{K}$ *:*

(EV1) $1.x=x$ *;*

(EV2) $\lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$ *;*

(EV3) $(\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$ *;*

(EV4) $\lambda.(\mu.x)=(\lambda\mu).x$.

Les éléments de E sont appelés *vecteurs*, par opposition aux éléments de $\mathbb{K}$ appelés *scalaires*[1]. Il est d'usage de désigner ces derniers par des lettres grecques.

Le neutre de E pour $+$ est le *vecteur nul* noté 0_E.

1.1 Règles opératoires

On déduit immédiatement des axiomes les règles de calcul suivantes, valables pour tous x, $y\in E$ et pour tous λ, $\mu\in\mathbb{K}$:

- $\lambda.0_E=0_E$;
- $0.x=0_E$;
- $\lambda.x=0_E\Rightarrow\lambda=0$ ou $x=0_E$;
- $-(\lambda.x)=(-\lambda).x=\lambda.(-x)$;
- $\lambda.(x-y)=\lambda.x-\lambda.y$;
- $(\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x$, etc.

Les axiomes (EV2) et (EV3) peuvent par ailleurs être généralisés aux sommes finies de vecteurs ou de scalaires.

Exemple 1

1. *Le corps* $\mathbb{K}$ *lui-même, muni de son addition et de la loi . définie par* $\lambda.\alpha=\lambda\alpha$ *pour tous* λ, $\alpha\in\mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$*-ev (structure canonique de* $\mathbb{K}$*-ev sur* $\mathbb{K}$*).*
2. *Plus généralement, si* $\mathbb{K}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{L}$*,* $\mathbb{L}$ *est un* $\mathbb{K}$*-ev pour la loi . :* $\lambda.\alpha=\lambda\alpha$ *pour* $\lambda\in\mathbb{K}$, $\alpha\in\mathbb{L}$*. Ainsi,* $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{R}$*-ev (et cette structure est différente de la structure de* $\mathbb{C}$*-ev de* $\mathbb{C}$*).*
3. Espace vectoriel produit : *si* E *et* E' *sont deux* $\mathbb{K}$*-ev, on munit* $E\times E'$ *de sa structure de groupe produit*[2] *et de la loi externe . définie par :*

$$\lambda.(x,x')=(\lambda.x,\lambda.x')$$

pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$, $x\in E$, $x'\in E'$*. Alors* $E\times E'$ *est un* $\mathbb{K}$*-ev (*structure canonique de $\mathbb{K}$-ev produit*). En particulier* $\mathbb{K}^2=\mathbb{K}\times\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^3$, ..., $\mathbb{K}^n$ *sont canoniquement des* $\mathbb{K}$*-ev.*

4. Espace vectoriel $\mathcal{F}(X,E)$: *si* E *est un* $\mathbb{K}$*-ev et si* X *est un ensemble, on munit* $\mathcal{F}(X,E)$ *de sa structure canonique*[2] *de groupe et de la loi externe . définie par*

$$\lambda.f:X\to E\ ;\ x\mapsto\lambda.f(x)$$

Alors $\mathcal{F}(X,E)$ *est un* $\mathbb{K}$*-ev (*structure canonique de $\mathbb{K}$-ev sur $F(X,E)$*).*
En particulier, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ *sont des* $\mathbb{R}$*-ev.*

1.2 Combinaisons linéaires

Soient E un $\mathbb{K}$-ev, n un entier naturel non nul et x_1, ..., x_n n vecteurs de E. Les *combinaisons linéaires* (c.l.) de $(x_1,...,x_n)$ sont les vecteurs de E de la forme

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda^i.x_i$$

où λ^1, ..., $\lambda^n\in\mathbb{K}$ ([3]).

Cette notion est "transitive" dans le sens suivant : si pour $j=1$, ..., p, y_j est c.l. de $(x_1,...,x_n)$ et si z est c.l. de $(y_1,...,y_p)$ alors z est c.l. de $(x_1,...,x_n)$.

2 Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit F une partie de E.

Définition 2 F *est un* sous-espace vectoriel *(sev) de* E *si*

(SEV1) $0_E\in F$ *;*

(SEV2) $\forall x\in F$, $\forall y\in F$, $x+y\in F$ *;*

(SEV3) $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall x\in F$, $\lambda.x\in F$.

Compte tenu de (SEV3), (SEV1) peut être remplacé par :

(SEV1') $F\neq\varnothing$.

(SEV2) et (SEV3) peuvent être résumés par :

(SEV2') $\forall\lambda$, $\mu\in\mathbb{K}$, $\forall x$, $y\in F$, $\lambda.x+\mu.y\in F$.

Il résulte de (SEV1) et (SEV2) que F est en particulier un sous-*groupe* du *groupe* $(E,+)$. En outre, muni de la restriction (à $\mathbb{K}\times F$) de la loi externe de E, F est un $\mathbb{K}$-ev (inclus dans E).

En particulier, *toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de* F *appartiennent à* F.

[1] Ce n'est pas une définition intrinsèque, *cf.* exemple 1.1.
[2] *cf.* chapitre "structures".

[3] Il est d'usage de noter les indices des scalaires en position supérieure ("*règle de covariance des indices*"). Il n'y aura jamais ambiguïté avec des exposants.

Exemple 2

1. *$\{0_E\}$ et E (sev triviaux[4]) ;*
2. *$\mathbb{R}$ est un sous-$\mathbb{R}$-ev du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$;*
3. *$CV0(\mathbb{R}) \subset CV(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;*
4. *$\mathcal{D}(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.*

Par contre, les suites monotones (*resp.* les fonctions périodiques) ne forment pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (*resp.* $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$).

2.1 Sous-espace vectoriel engendré

Remarque 1 *Si F et G sont deux sev du $\mathbb{K}$-ev E, $F \cap G$ est un sev de E. Plus généralement, l'intersection d'un nombre quelconque de sev de E est un sev de E. Attention, il n'en est pas de même pour la réunion, cf. les exercices.*

Soit P une *partie* du $\mathbb{K}$-ev E (on *ne* suppose *pas* que P est un sev de E).

Théorème 1 (et définition) *L'ensemble de tous les sev de E contenant P admet un plus petit élément* (mod $\subset$) *: le* sev de E engendré par P *noté $\langle P\rangle$ ou* vect $\langle P\rangle$.

Si $P = \{x_1, .., x_n\}$ on note aussi $\langle x_1, ..., x_n\rangle$ et on parle de sev engendré par la famille $(x_1, ..., x_n)$.

Pour montrer que $F = \langle P\rangle$, on doit donc vérifier trois conditions :

- F est un sev de E ;
- $P \subset F$;
- pour tout sev G de E, $P \subset G \Rightarrow F \subset G$.

Exemples et propriétés

1. $\langle\varnothing\rangle = \langle\{0_E\}\rangle = \{0_E\}$;
2. si F est un sev de E, $\langle F\rangle = F$;
3. $P \subset Q \Rightarrow \langle P\rangle \subset \langle Q\rangle$;
4. si $a \in E$, $\langle a\rangle = \langle\{a\}\rangle = \mathbb{K}a = \{\lambda.a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$.

La généralisation de ce dernier exemple conduit à une description "par l'intérieur" du sev engendré par une partie P : $\langle P\rangle$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n} \lambda^i.x_i$ d'éléments x_1, ..., x_n de P (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et λ^1, ..., $\lambda^n \in \mathbb{K}$).

2.2 Somme de sous-espaces vectoriels

On a vu que la réunion n'était pas une opération adaptée à la notion de sev. On peut se demander, étant donnés deux sev F et G du $\mathbb{K}$-ev E, quel est le sev engendré par $F \cup G$. La définition suivante apporte la réponse :

Définition 3 *La* somme *de F et G (sev du $\mathbb{K}$-ev E) est*

$$F + G = \{y + z \mid y \in F,\ z \in G\} \ :$$

ensemble de toutes les sommes d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Il est immédiat que $F + G$ est un sev de E (et en fait, $F + G = \langle F \cup G\rangle$). L'opération "somme" sur les sev du $\mathbb{K}$-ev E possède les propriétés suivantes, pour tous sev F, G de E :

- elle est commutative et associative ;
- $F + \{0_E\} = F + F = F$ ([5]) ;
- $F + E = E$;
- plus généralement $F + G = G \Leftrightarrow F \subset G$.

Cette définition admet un cas particulier spécialement utile.

2.2.1 Sommes directes

Soient F et G deux sev du $\mathbb{K}$-ev E.

Définition 4 *La somme $F + G$ est* directe *si pour tous $y \in F$, $z \in G$:*

$$y + z = 0_E \Rightarrow y = z = 0_E.$$

On la note alors $F \oplus G$ ([6]).

Cela signifie que le *vecteur nul* peut s'écrire *d'une seule manière* comme somme d'un vecteur de F et un vecteur de G. Ceci peut être généralisé à un vecteur quelconque (de $F + G$) :

Proposition 1 (1ère caractérisation) *La somme $F + G$ est directe* ssi *tout vecteur $x \in F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.*

On peut également utiliser l'intersection :

Proposition 2 (2ème caractérisation) *La somme $F + G$ est directe* ssi $F \cap G = \{0_E\}$.

Attention cependant : alors que la définition 4 peut être étendue à un nombre quelconque de sev de E, cette deuxième caractérisation demeure réservée au cas de *deux* sev de E.

Examinons des exemples dans le cas de la définition plus précise suivante.

2.2.2 Sous-espaces supplémentaires

Soient F et G deux sev du $\mathbb{K}$-ev E.

Définition 5 *F et G sont* supplémentaires *si la somme $F + G$ est directe et égale à E :*

$$E = F \oplus G.$$

Cela signifie que *tout* vecteur x de E s'écrit *de manière unique* $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$. On dit que G est *un* supplémentaire de F dans E (attention, un sev admet en général plusieurs supplémentaires, typiquement une infinité).

Exemple 3

1. *E et $\{0_E\}$ sont supplémentaires dans E ;*
2. *Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et i$\mathbb{R}$ (ensemble des imaginaires purs) sont supplémentaires ;*
3. *Plus généralement, dans le plan vectoriel $P = \mathbb{R}^2$, deux droites vectorielles distinctes $\mathbb{R}x$ et $\mathbb{R}y$ (avec x et y non colinéaires) sont supplémentaires ;*
4. *Dans le $\mathbb{R}$-ev $CV(\mathbb{R})$ des suites de réels convergentes, les sev $CV0(\mathbb{R})$ (suites de limite nulle) et $CT(\mathbb{R})$ (suites constantes) sont supplémentaires ;*

[4] Les sev non triviaux de E sont les sev *propres* de E. Les sev de E autres que E sont les sev *stricts*.

[5] Il est donc *faux* en général que $F + G = F + G' \Rightarrow G = G'$.

[6] L'utilisation de cete notation suppose d'avoir vérifié *au préalable* que la somme est directe.

5. *Dans le* $\mathbb{R}$-*ev* $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, les sev* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{I}$ *des fonctions respectivement paires et impaires sont supplémentaires.*

La notion de sev supplémentaires permet de définir des applications importantes : les projections et les symétries vectorielles, *cf.* 3.3.

2.3 Sous-espaces affines d'un $\mathbb{K}$-ev

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Certains sous-ensembles de E ne possèdent pas la structure de sev, mais s'en déduisent simplement.

Définition 6 *Si* $a \in E$*, la* translation *de vecteur* a *est l'application* $t_a : E \to E\ ;\ x \mapsto x + a$.

Soient maintenant F un sev de E et $a \in E$. On définit

$$\mathcal{F} = F + a = t_a \langle F \rangle = \{x + a \mid x \in F\}\ :$$

$\mathcal{F}$ est le *sous-espace affine* (sea) de E passant par a et de direction F.

Remarquons que $\mathcal{F} \neq \varnothing$ puisque $a \in \mathcal{F}$. Le vecteur a ne joue aucun rôle particulier (on peut le remplacer par n'importe quel élément de $\mathcal{F}$). Par contre, F est entièrement déterminé par $\mathcal{F}$ puisque $F = \{x - x' \mid x, x' \in \mathcal{F}\} = \{x - a \mid x \in \mathcal{F}\}$.

Exemple 4

1. *Tout sev de* E *est un sous-espace affine de* E*. (Attention, un sea de* E *n'est un sev de* E *que lorsqu'il contient le vecteur nul —* $a = 0_E$*).*
2. *Tout singleton* $\{a\}$ *est un sea de* E *(*$F = \{0_E\}$*) ;*
3. *Les droites et plans affines, cf. chapitres de géométrie ;*
4. *L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre* n *est un sea de* $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ *passant par* f_0 *(solution particulière) et de direction l'espace des solutions de l'équation homogène ;*
5. *Plus généralement, l'ensemble des solutions d'une condition linéaire de la forme* $f(x) = b$ *(*$x \in E$*,* $f \in L_{\mathbb{K}}(E,F)$*,* $b \in F$ *—* cf. *3 et le chapitre "systèmes linéaires").*

On a la relation de parallélisme entre les sea de E :

Définition 7 *Soient* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *deux sea de* E *de directions respectives* F *et* G*.* $\mathcal{F}$ *est* parallèle *à* $\mathcal{G}$ *si* $F \subset G$ *ou* $G \subset F$*.*

Attention, avec cette définition la relation de parallélisme n'est pas *transitive*.

L'exemple 4.2 montre que *l'intersection de deux sea de* E *n'est pas, en général, un sea de* E (puisqu'elle peut être vide). Toutefois, c'est la seule restriction. Dans le cas contraire on a bien :

Proposition 3 *Soient* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{G}$ *deux sea de* E *de directions respectives* F *et* G*. Si* $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \varnothing$*,* $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ *est un sea de* E *de direction* $F \cap G$*.*

3 Applications linéaires

3.1 Définitions et exemples

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Soit $f : E \to F$ une application de E dans F.

Définition 8 f *est* ($\mathbb{K}$-) linéaire *de* E *dans* F *si elle vérifie*

(AL1) $\forall x, y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$ *et*

(AL2) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(\lambda.x) = \lambda.f(x)$.

Ces deux axiomes peuvent être résumés par

(AL1') $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f(\lambda.x + \mu.y) = \lambda.f(x) + \mu.f(y)$.

Remarquons que f est alors en particulier un morphisme *de groupes* du groupe $(E,+)$ dans le groupe $(F,+)$. À ce titre, $f(0_E) = 0_F$ et f est injective *ssi* $\ker f = \{0_E\}$.

En outre, l'axiome (AL1') se généralise à un nombre quelconque de vecteurs x_1, ..., x_n et de scalaires λ^1, ..., λ^n :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda^i.x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i.f(x_i)$$

("l'image d'une c.l. est la c.l. des images" — avec les mêmes coefficients).

Exemple 5 *E et F étant des $\mathbb{K}$-ev*

1. *L'application nulle* $f : E \to F\ ;\ x \mapsto 0_F$ *;*
2. *L'homothétie (vectorielle) de rapport* $\lambda \in \mathbb{K}$ *définie par* $h_\lambda : E \to E\ ;\ x \mapsto \lambda.x$ *;*
3. $\lim : CV(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\ ;\ (u_n) \mapsto \lim(u_n)$ *;*
4. *"valeur en a" :* $\mathcal{V}_a : \mathcal{F}(X,E) \to E\ ;\ f \mapsto f(a)$ *(où* X *est un ensemble et* $a \in X$*) ;*
5. *Les projections et les symétries, cf. 3.3 ;*
6. $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *sont* $\mathbb{R}$*-linéaires, mais pas* $\mathbb{C}$*-linéaires.*

La composée de deux applications linéaires est linéaire :

Proposition 4 *Soient* E*,* F*,* G *trois* $\mathbb{K}$*-ev et* $f : E \to F$*,* $g : F \to G$*. Si* f *est linéaire de* E *dans* F *et si* g *est linéaire de* F *dans* G*,* $g \circ f$ *est linéaire de* E *dans* G*.*

On a les mêmes définitions particulières que dans le cas des autres structures :

Définition 9 *Une application linéaire* $f : E \to F$ *est*

- *un* endomorphisme *si* $F = E$ *;*
- *un* isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev *si* f *est une bijection de* E *sur* F *;*
- *un* automorphisme *si* $F = E$ *et* f *est une bijection de* E *sur* E*.*

Dans les derniers cas, la réciproque de f est automatiquement linéaire :

Proposition 5 *Si* f *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-ev de* E *sur* F*, alors* $f^{-1} : F \to E$ *est un (iso)morphisme de* $\mathbb{K}$*-ev de* F *sur* E*.*

Deux $\mathbb{K}$-ev entre lesquels il existe un isomorphisme sont dits *isomorphes*, et on note : $E \simeq_{\mathbb{K}} F$.

Les applications linéaires respectent la structure de sev :

Proposition 6 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire.*

1. *Si E' est un sev de E, $f\langle E'\rangle$ est un sev de F ;*
2. *Si F' est un sev de F, $f^{-1}\langle F'\rangle$ est un sev de E.*

En particulier, l'image et le noyau d'une application linéaire sont des sev.

3.2 Ensembles d'applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev.

Notation 1

- *On note $L_{\mathbb{K}}(E, F)$ (ou $L(E, F)$ s'il n'y a pas ambiguïté sur le corps $\mathbb{K}$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*
- *Dans le cas où $F = E$, l'ensemble des endomorphismes de E est noté $L_{\mathbb{K}}(E)$ (plutôt que $L_{\mathbb{K}}(E, E)$), ou $L(E)$ s'il n'y a pas ambiguïté.*

Ces ensembles possèdent les structures suivantes :

Proposition 7 *$L_{\mathbb{K}}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-ev (sev du $\mathbb{K}$-ev $\mathcal{F}(E, F)$ de toutes les applications de E dans F — ex.1.4).*

Dans le cas où $F = E$, la loi $\circ$ est également une loi interne sur $L_{\mathbb{K}}(E)$ qui est distributive par rapport à $+$ (*cf.* chapitre "structures") :

Proposition 8 *$(L_{\mathbb{K}}(E), +, \circ)$ est un anneau.*

Ceci permet de définir, si $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$: $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et

$$f^n = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ facteurs "}f\text{"}}.$$

On peut alors appliquer les règles de calculs valables dans tout anneau, p. ex. développer $(f + g)^n$ grâce à la formule du binôme *si* $f \circ g = g \circ f$.

D'après prop. 5, les éléments inversibles de l'anneau $L_{\mathbb{K}}(E)$ sont les automorphismes de E :

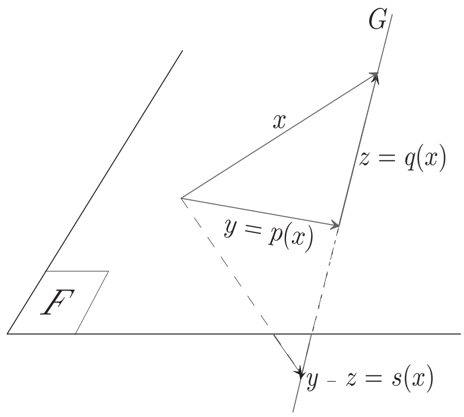
Notation 2 *On note $GL_{\mathbb{K}}(E)$ l'ensemble des automorphismes du $\mathbb{K}$-ev E.*

Proposition 9 *$(GL_{\mathbb{K}}(E), \circ)$ est un groupe ("*groupe linéaire*" de E). C'est le groupe $\mathcal{U}(L_{\mathbb{K}}(E))$ des unités de l'anneau $L_{\mathbb{K}}(E)$.*

3.3 Projections ; symétries

Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev *supplémentaires* de E. Si $x \in E$ on décompose x sur la somme directe :

$$\begin{array}{ccccc} E & = & F & \oplus & G \\ x & = & y & + & z \end{array}$$



3.3.1 Projections

Définition 10 *On pose $p(x) = y$ (*resp. *$q(x) = z$). p (*resp. *q) est la* projection sur F *(*resp. G*)* parallèlement à *G (*resp. *F).*

Il s'agit d'endomorphismes du $\mathbb{K}$-ev E :

Proposition 10 *p, $q \in L_{\mathbb{K}}(E)$ et : $\mathrm{Im}\, p = F = \ker q$; $\ker p = G = \mathrm{Im}\, q$.*

En outre on a les relations suivantes :

Proposition 11

$$\begin{array}{l} p \circ p = p \,;\, q \circ q = q \,; \\ p \circ q = q \circ p = 0_{L_{\mathbb{K}}(E)}. \end{array}$$

Ces résultats conduisent à poser la définition suivante :

Définition 11 *Soit $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$. f est un* projecteur *de E si : $f \circ f = f$.*

Ainsi les projections sont des projecteurs. Le th. suivant montre que ce sont les seuls :

Théorème 2 *Soit f un projecteur de E. Alors f est la projection sur $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\ker f$.*

3.3.2 Symétries

Définition 12 *On pose $s(x) = y - z$. s est la* symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Comme $s = p - q$ (notations du 3.3.1) et comme p, $q \in L_{\mathbb{K}}(E)$, il résulte de la prop. 7 que : $s \in L_{\mathbb{K}}(E)$. Mais on peut être plus précis :

Proposition 12 *s est une* involution *de E :*

$$s \circ s = \mathrm{Id}_E\,.$$

En particulier, s est bijective ($s \in GL_{\mathbb{K}}(E)$) et $s^{-1} = s$. En outre, comme en 3.3.1, F et G sont complètement déterminés par s :

Proposition 13 *$F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$; $G = \ker(s + \mathrm{Id}_E)$.*

On peut constater pour finir qu'il n'y a pas d'autre involution *linéaire* que les symétries :

Théorème 3 *Soit f une involution linéaire de E ($f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ et $f \circ f = \mathrm{Id}_E$). Alors f est la symétrie par rapport à $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(f + \mathrm{Id}_E)$.*