PCSI - mathématiques

Equations différentielles linéaires

1 Généralités

On appelle *équation différentielle* (e.d.) *d'ordre* n une relation liant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction aux dérivées d'ordres inférieurs. C'est donc une condition de la forme

$$y^{(n)} = F\left(x,\, y,\, y',\, ...,\, y^{(n-1)}\right) \tag{E}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$.

Résoudre (E) c'est trouver tous les couples $(I,\, f)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I tels que pour tout $x \in I$:

$$f^{(n)}(x) = F\left(x,\, f(x),\, f'(x),\, ...,\, f^{(n-1)}(x)\right)$$

Un tel couple $(I,\, f)$ est appelé une *solution* de (E). La courbe représentative de f est parfois appelée une *courbe intégrale* de (E).

Une *condition initiale* pour une solution $(I,\, f)$ de (E) est un n-uplet $(a,\, b_0,\, ...,\, b_{n-1})$ assorti de n conditions de la forme :

$$\begin{cases} f(a) & = & b_0 \\ f'(a) & = & b_1 \\ & \vdots & \\ f^{(n-1)}(a) & = & b_{n-1} \end{cases}$$

(on verra — théorèmes 2 et 5 — qu'on ne peut imposer davantage de relations pour une solution donnée).

On ne sait résoudre explicitement qu'un très petit nombre d'équations différentielles de formes bien particulières. Techniquement, une e.d. est considérée comme résolue lorsqu'on a réussi à la ramener à des calculs de primitives. Ceci ne garantit pas la possibilité d'expliciter les primitives en question.

2 Les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on définit $f_\alpha : x \mapsto e^{\alpha x}$. f_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'_\alpha(x) = \alpha\, e^{\alpha x} = \alpha f_\alpha(x)$. Donc f_α est solution de l'équation

$$y' = \alpha y \tag{1}$$

Réciproquement, supposons que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de (1). Posons $g(x) = e^{-\alpha x} f(x)$. g est dérivable et

$$g'(x) = -\alpha\, e^{-\alpha x} f(x) + e^{-\alpha x}(\alpha f(x)) = 0$$

donc g est une constante λ et $f(x) = \lambda\, e^{\alpha x} = \lambda f_\alpha(x)$.

Ainsi, toutes les solutions de (1) sont proportionnelles à la fonction f_α.

Remarque 1 *α est la dérivée de αx par rapport à x.*

3 E.d. linéaires d'ordre 1

Il s'agit d'équations différentielles du type

$$a(x)\; y' + b(x)\; y = c(x) \tag{E}$$

où $a,\, b,\, c : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur leur intervalle de définition I et :

$$\forall x \in I,\, a(x) \neq 0$$

Ceci permet éventuellement de ramener (E) à la *forme résolue*

$$y' + b_1(x)\;\; y = c_1(x) \tag{F}$$

en posant simplement $b_1 = \frac{b}{a}$ et $c_1 = \frac{c}{a}$. La division par a est de toute façon inévitable au cours du calcul.

Une solution est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$:

$$a(x)\;\, f'(x) + b(x)\;\, f(x) = c(x)$$

(les solutions doivent donc ici être définies sur I tout entier, il n'est donc pas nécessaire de préciser le domaine en même temps que f.)

On associe à (E) l'*équation homogène*

$$a(x)\; y' + b(x)\; y = 0 \tag{E$_0$}$$

obtenue en remplaçant la fonction c par 0.

Remarque 2 *Si f est solution de* (E) *on peut écrire $f'(x) = \frac{1}{a(x)}(c(x) - b(x)\; f(x))$ ce qui montre que f' est continue sur I donc : $f \in \mathcal{C}^1(I,\, \mathbb{R})$.*

3.1 Structure de l'ensemble des solutions

Pour f dérivable sur I il est pratique de noter $T(f) = af' + bf$ (qui est une fonction définie sur I).

Supposons que l'on connaisse une solution f_0 de (E). Alors

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E)} \quad &\Leftrightarrow \quad T(f) = c = T(f_0) \\ &\Leftrightarrow \quad T(f) - T(f_0) = 0 = T(f - f_0) \\ &\Leftrightarrow \quad g = f - f_0 \text{ solution de } (\mathrm{E}_0) \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de (E) s'obtient en ajoutant à f_0 une solution g quelconque de (E$_0$).

Selon ces remarques la résolution de (E) va s'effectuer en deux étapes.

3.2 résolution de (E$_0$)

Remarque 3 *Puisque la fonction a ne s'annule pas,* (E$_0$) *peut s'écrire $y' = -\frac{b}{a}y$. Par analogie avec la remarque 1. on est conduit à définir la fonction*

$$\varphi = e^{-\int \frac{b}{a}} \tag{2}$$

La notation $\int \frac{b}{a}$ désignant une *primitive de la fonction $\frac{b}{a}$.*

L'équation homogène se résout alors grâce au résultat suivant :

Théorème 1 *φ est solution de* (E_0)*, et toute solution de* (E_0) *est proportionnelle à φ.*

Remarque 4 *Il résulte de l'expression obtenue pour ces solutions que : toute solution de* (E_0) *autre que la fonction nulle* ne s'annule jamais *sur I.*

3.3 méthode de variation de la constante

Selon les remarques initiales il suffit maintenant de déterminer une solution particulière f_0 de (E). On emploie la méthode dite "de variation de la constante". φ désigne toujours la fonction $\exp\left(-\int \frac{b}{a}\right)$ solution de l'équation homogène (E_0).

Si $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ on définit $g \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ par $f = g\,\varphi$ (ce qui est légitime puisque φ ne s'annule pas ; il suffit de poser $g = \frac{f}{\varphi}$). On calcule ainsi :

$$\begin{array}{r|rcl} b\times & f & = & g\,\varphi \\ a\times & f' & = & g\,\varphi' + g'\varphi \\ \hline & T(f) & = & g\,T(\varphi) + a\,\varphi\,g' \\ & & = & a\,\varphi\,g' \end{array}$$

pour voir que f est solution de (E) *ssi* $a\,\varphi\,g' = c$ d'où $g' = \frac{c}{a\,\varphi}$ donc $g(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)\,\varphi(x)}\,dx + \lambda$ et finalement :

$$f(x) = \underbrace{\left(\int \frac{c(x)}{a(x)\;\varphi(x)}\,dx\right)\varphi(x)}_{f_0} + \underbrace{\lambda\,\varphi(x)}_{g \text{ sol. de } (\mathrm{E}_0)} \qquad (3)$$

(On a fait "varier la constante λ" : alors que les solutions de (E_0) sont de la forme $\lambda\,\varphi$ où λ est une constante, on a remplacé cette constante par une fonction g pour trouver une solution f_0 de (E).)

Exemple 1 $xy' - (x+1)\,y + \mathrm{e}^x\left(x^2+1\right) = 0$

3.4 Unicité de la solution pour une c.i. donnée

La donnée d'une condition initiale détermine entièrement une solution de l'équation (E) :

Théorème 2 *Si $a \in I$, il existe une* unique *solution de* (E) *vérifiant la condition initiale $f(a) = b_0$.*

4 Méthode d'Euler

Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sont l'un des *seuls types d'e.d. pour lesquels il existe une méthode de résolution explicite complète.* D'un point de vue théorique, ce n'est pas gênant (on peut manipuler une fonction uniquement en utilisant l'e.d. qu'elle vérifie). D'un point de vue pratique, même dans le cas linéaire lorsqu'on ne sait pas calculer les primitives (2) ou (3), on peut recourir à une méthode de *résolution approchée* comme celle d'Euler.

Soit une équation différentielle d'ordre 1 (linéaire ou non) mise sous forme résolue

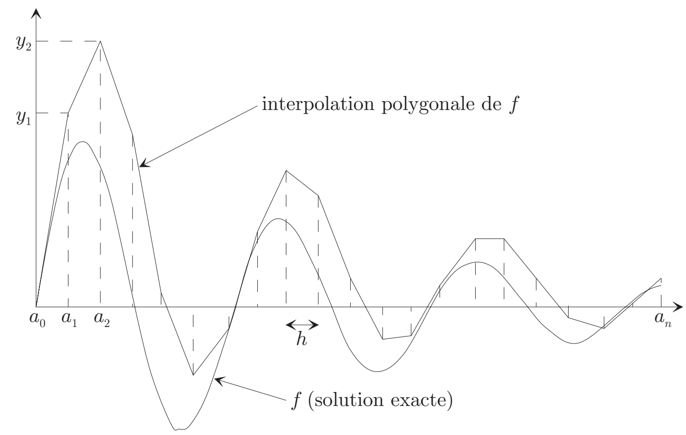
$$y' = F(x, y).$$

On va approcher la *courbe* (plutôt que la solution elle-même) correspondant à la condition initiale $y(a) = b_0$.

Soit h un réel > 0 (le "pas" de la méthode). On considère que $y(a+h) - y(a)$ est voisin de $h\;y'(a)$ qui vaut $F(a, y_0)$ et que l'on sait calculer. Ceci conduit à définir $a_k = a + kh$ et de proche en proche $y_0 = y(a_0) = y(a) = b_0$ et

$$y_{k+1} = y_k + h\;F(a_k, y_k).$$

Alors la ligne polygonale joignant les points (a_k, y_k) est une "approximation de la courbe" représentant la solution étudiée.



La méthode voit son efficacité particulièrement pénalisée par deux exigences contradictoires :

- d'une part, si h est trop grand, l'approximation (de $y(a+h) - y(a)$ par $h\;y'(a)$) est imprécise ;
- d'autre part, si l'on diminue trop h, le nombre d'étapes nécessaires à parcourir un intervalle donné devient grand. Les erreurs d'approximation effectuées à chaque étape sont petites, mais leur accumulation nuit à nouveau à la précision.

La méthode d'Euler n'est donc pas une technique de résolution approchée très performante.

5 E.d. linéaires d'ordre 2

Il s'agit d'équations différentielles du type

$$a(x)\;y'' + b(x)\;y' + c(x)\;y = d(x) \qquad (\mathrm{E})$$

où a, b, c, $d : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur leur intervalle de définition I et :

$$\forall x \in I\;\;[a(x) \neq 0]$$

Une solution est une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$:

$$a(x)\;f''(x) + b(x)\;f'(x) + c(x)\;f(x) = d(x)$$

(encore définie sur tout I.)

On associe à (E) l'*équation homogène*

$$a(x)\;y'' + b(x)\;y' + c(x)\;y = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

obtenue en remplaçant la fonction d par 0.

Remarque 5 *Si f est solution de* (E) *on peut écrire $f''(x) = \frac{1}{a(x)}(d(x) - b(x)\ f'(x) - c(x)\ f(x))$ ce qui montre que f'' est continue sur I donc : $f \in \mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$.*

Définissons alors

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & a\,f'' + b\,f' + c\,f \end{array}$$

Selon le même principe qu'à l'ordre 1, supposons que f_0 soit solution de (E). Alors

$$\begin{array}{rcl} f \text{ solution de (E)} & \Leftrightarrow & T(f) = d = T(f_0) \\ & \Leftrightarrow & T(f) - T(f_0) = 0 = T(f - f_0) \\ & \Leftrightarrow & g = f - f_0 \text{ solution de } (\mathrm{E}_0) \end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de (E) s'obtient en ajoutant à f_0 une solution g quelconque de (E_0).
Comme à l'ordre 1 on résout (E) en deux étapes.

5.1 résolution de (E_0)

L'équation homogène (E_0) se résout à l'aide des théorèmes suivants :

Théorème 3 *Il existe un couple (u, v) de solutions de (E_0) tel que pour tout $x \in I$, le* wronskien

$$W(x) \overset{\text{déf.}}{=} \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = u(x)\,v'(x) - u'(x)\,v(x)$$

soit non nul.

Théorème 4 *Si (u, v) est un couple de solutions de (E_0) dont le wronskien ne s'annule jamais sur I, toutes les solutions de (E_0) sont de la forme*

$$x \mapsto \lambda u(x) + \mu v(x)$$

où λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

On va maintenant détailler la recherche d'un tel couple (u, v)) dans le cas où les fonctions a, b et c sont des constantes.

5.1.1 détermination d'un couple (u, v) lorsque a, b, c sont des constantes

On considère maintenant l'équation

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = 0 \qquad (\mathrm{E}_0)$$

où a, b, c sont des constantes, avec $a \neq 0$. (L'intervalle I est $\mathbb{R}$.)
Soit $f(x) = \mathrm{e}^{r\,x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On calcule $f'(x) = r\ \mathrm{e}^{rx}$ puis $f''(x) = r^2\ \mathrm{e}^{rx}$ et $T(f)(x) = \left(a\,r^2 + b\,r + c\right)\mathrm{e}^{rx}$. Par conséquent, f est solution de (E_0) *ssi* r vérifie l'équation du second degré

$$a\,r^2 + b\,r + c = 0 \qquad (\mathrm{E_c})$$

appelée *équation caractéristique* de (E_0). Il faut bien sûr distinguer ensuite selon le nombre de solutions réelles de l'équation $(\mathrm{E_c})$.

Cas 1 (E_c) *a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.*

On a alors les fonctions $u : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1\,x}$ et $v : x \mapsto \mathrm{e}^{r_2\,x}$, solutions de (E_0). Calculons leur wronskien :

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_1\,x} & \mathrm{e}^{r_2\,x} \\ r_1\ \mathrm{e}^{r_1\,x} & r_2\ \mathrm{e}^{r_2\,x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)\ \mathrm{e}^{(r_1+r_2)\,x} \neq 0$$

Conclusion Les solutions de (E_0) sont les fonctions

$$f : x \mapsto \lambda\ \mathrm{e}^{r_1\,x} + \mu\ \mathrm{e}^{r_2\,x}$$

où λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 $y'' + 2y' - 3y = 0$

Cas 2 (E_c) *a une solution réelle ("double") $r_0 (= -\frac{b}{2a})$.*

Cette fois on ne dispose que d'une solution $u : x \mapsto \mathrm{e}^{r_0\,x}$. Définissons $v(x) = x\ \mathrm{e}^{r_0\,x}$ pour tout x. On calcule $v'(x) = (1 + r_0\,x)\ \mathrm{e}^{r_0\,x}$ puis $v''(x) = 2r_0\ \mathrm{e}^{r_0\,x} + r_0^2\,x\ \mathrm{e}^{r_0\,x}$ et donc $T(v)(x) = \underbrace{\left(a\,r_0^2 + b\,r_0 + c\right)}_{=0}x\ \mathrm{e}^{r_0\,x} + \underbrace{(2a\,r_0 + b)}_{=0}\ \mathrm{e}^{r_0\,x}$, le second terme étant nul parce que r_0 est solution *double* de $(\mathrm{E_c})$. Finalement, v est solution de (E_0). On calcule le wronskien de u et v :

$$\begin{array}{rcl} W(x) & = & \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_0\,x} & x\ \mathrm{e}^{r_0\,x} \\ r_0\ \mathrm{e}^{r_0\,x} & (1 + r_0 x)\ \mathrm{e}^{r_0\,x} \end{vmatrix} \\ & = & \mathrm{e}^{2r_0 x} \neq 0 \end{array}$$

Conclusion Les solutions de (E_0) sont les fonctions

$$f : x \mapsto (\lambda + \mu\,x)\ \mathrm{e}^{r_0\,x}$$

où λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 $y'' + 2y' + y = 0$

Cas 3 (E_c) *a deux solutions complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\omega$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\omega$.*

On calcule temporairement dans $\mathbb{C}$, définissant

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \\ & f & \mapsto & a\,f'' + b\,f' + c\,f. \end{array}$$

T conserve les mêmes propriétés que dans le cas réel et les calculs du cas 1. restent valables dans $\mathbb{C}$. Ainsi les deux fonctions complexes $u_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_1\,x}$ et $u_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{r_2\,x}$ $(= \bar{u}_1)$ sont solutions de (E_0) *sur* $\mathbb{C}$.
On remarque ensuite que *comme a, b et c sont réels*, $T\left(\bar{f}\right) = a\,\bar{f}'' + b\,\bar{f}' + c\,\bar{f} = \overline{(a\,f'' + b\,f' + c\,f)} = \overline{T(f)}$ d'où $T(\mathrm{Re}(f)) = \mathrm{Re}(T(f))$ et $T(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(T(f))$. On en déduit deux autres fonctions u et v solutions de (E_0) *sur* $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} u & = & \mathrm{Re}(u_1) : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha\,x}\cos(\omega\,x) \\ v & = & \mathrm{Im}(u_1) : x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha\,x}\sin(\omega\,x). \end{array}$$

Il reste à calculer le wronskien de u et v en x :

$$\begin{array}{rcl} W(x) & = & \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\alpha\,x}\cos(\omega\,x) & \mathrm{e}^{\alpha\,x}\sin(\omega\,x) \\ \begin{array}{c}\alpha\ \mathrm{e}^{\alpha\,x}\cos(\omega\,x) \\ -\omega\ \mathrm{e}^{\alpha\,x}\sin(\omega\,x)\end{array} & \begin{array}{c}\alpha\ \mathrm{e}^{\alpha\,x}\sin(\omega\,x) \\ +\omega\ \mathrm{e}^{\alpha\,x}\cos(\omega\,x)\end{array} \end{vmatrix} \\ & = & \omega\ \mathrm{e}^{2\alpha\,x} \neq 0 \end{array}$$

Conclusion Les solutions de (E_0) sont les fonctions

$$f : x \mapsto (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))\ \mathrm{e}^{\alpha x}$$

où $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Exemple 4 $y'' + 2y' + 4y = 0$

Remarque 6 *On rappelle l'écriture (valable pour $(\lambda,\ \mu) \neq (0,\ 0)$) :*

$$\begin{aligned}\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x) &= \sqrt{\lambda^2+\mu^2}\Bigg(\underbrace{\tfrac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}}_{\cos\varphi} \cos(\omega x) \\ &\quad + \underbrace{\tfrac{\mu}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}}_{\sin\varphi} \sin(\omega x)\Bigg) \\ &= A \cos(\omega x - \varphi)\end{aligned}$$

5.2 résolution de (E)

Comme pour les e.d. linéaires d'ordre 1, il suffit de déterminer une solution particulière f_0. On effectue cette recherche uniquement lorsque a, b, c sont des constantes et que le second membre $d(x)$ est d'une forme "particulière". L'équation s'écrit

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = d(x) \tag{E}$$

5.2.1 $d(x)$ polynôme

L'examen du cas particulier $d = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$ conduit

- à distinguer selon que c et / ou b est nul ;
- à rechercher une solution particulière également polynomiale.

Cas 1 $c \neq 0$

On utilise le

Lemme 1 *Si* $\deg P = n \in \mathbb{N}$, il existe *un* unique *polynôme Q tel que* $\deg Q = n$ *et*

$$a\,Q'' + b\,Q' + c\,Q = P$$

(et alors la fonction polynôme associée à Q est solution de (E)*.)*

Exemple 5 $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 1$

Cas 2 $c = 0,\ b \neq 0$

Alors si $z = y'$, z vérifie $a\,z' + b\,z = d(x)$ et on montre comme dans le lemme 1 que cette condition admet une unique solution polynomiale. Q de même degré n que P. Alors $f_0 = \int Q(x)\ dx$ est solution particulière de (E).

Cas 3 $c = b = 0$ *(et $a \neq 0$)*

Alors (E) se réduit à $a\,y'' = d(x)$ donc si $P(x) = \frac{1}{a}\int d(x)\ dx$, $f_0 = \int P(x)\ dx$ est solution de (E).

5.2.2 $d(x)$ polynôme $\times$ exponentielle

Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on définit $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-\alpha x}\ f(x)$. On a alors

$$\begin{array}{c|rcl} c\times & f(x) & = & \mathrm{e}^{\alpha x}\ g(x) \\ b\times & f'(x) & = & \mathrm{e}^{\alpha x}\ g'(x) + \alpha\ \mathrm{e}^{\alpha x}\ g(x) \\ a\times & f''(x) & = & \mathrm{e}^{\alpha x}\ g''(x) + 2\alpha\ \mathrm{e}^{\alpha x}\ g'(x) \\ & & & +\alpha^2\ \mathrm{e}^{\alpha x}\ g(x) \\ \hline & T(f)(x) & = & \mathrm{e}^{\alpha x}[a\,g''(x) + (2a\alpha + b)\ g'(x) \\ & & & + \left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right)\ g(x)] \end{array}$$

donc f est solution de (E) *ssi* g est solution de

$$a\,y'' + (2a\alpha + b)\ y' + \left(a\alpha^2 + b\alpha + c\right)\ y = P(x) \tag{F}$$

dont le second membre est polynômial, et qui peut donc être résolue selon le cas précédent.

Exemple 6 $y'' - 3y' + 2y = x\,\mathrm{e}^x$

5.2.3 $d(x)$ polynôme $\times$ fonction circulaire

On considère

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = \cos(m\,x)\ P(x) \tag{E_1}$$

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = \sin(m\,x)\ P(x) \tag{E_2}$$

On utilise à nouveau l'extension de T aux fonctions complexes déjà rencontrée en résolvant (E_0). On rappelle les relations $T(\mathrm{Re}(f)) = \mathrm{Re}(T(f))$ et $T(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(T(f))$. On en déduit que si f est une solution (complexe) de

$$a\,y'' + b\,y' + c\,y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,m\,x}\ P(x) \tag{F}$$

alors $\mathrm{Re}(f)$ (*resp.* $\mathrm{Im}(f)$) est solution de (E_1) (*resp.* (E_2)).

Pour déterminer une solution particulière de (F) on emploie la même méthode qu'au cas précédent avec cette fois $\alpha = \mathrm{i}\,m \in \mathbb{C}$.

Exemple 7 $y'' - 2y' + 2y = \mathrm{e}^x \sin x$

5.3 Unicité de la solution pour une c.i. donnée

Comme à l'ordre 1, la donnée d'une condition initiale détermine entièrement une solution de l'équation (E). Dans le cas d'une équation différentielle d'ordre 2, cette condition est de la forme $f(a) = b_0,\ f'(a) = b_1$.

Théorème 5 *Si $a \in I$, il existe une* unique *solution de* (E) *vérifiant la condition initiale $f(a) = b_0$ et $f'(a) = b_1$.*