PCSI - mathématiques

Dimension des espaces vectoriels

Le corps de base est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E désigne un $\mathbb{K}$-ev.

Rappel Le sev de E engendré par une partie P est le plus petit (mod. $\subset$) des sev de E contenant P. Il est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de P. Lorsque $P = \{u_1, ..., u_n\}$ on note $\langle P\rangle = \langle u_1, ..., u_n\rangle = \left\langle (u_i)_{1\leq i\leq n}\right\rangle$ et on parle aussi de sev engendré par la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$.

1 Familles de vecteurs

1.1 Familles libres ; familles liées

Définition 1 *Une famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ de vecteurs de E est* libre *si pour toute famille $\left(\lambda^i\right)_{1\leq i\leq n}$ de scalaires :*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i u_i = 0_E \Rightarrow \left(\lambda^1 = ... = \lambda^n = 0\right)$$

autrement dit si : la seule combinaison linéaire nulle des u_i est la combinaison linéaire triviale.

Cela équivaut à la condition suivante :

Proposition 1 *La famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre ssi* tout *vecteur de $\left\langle (u_i)_{1\leq i\leq n}\right\rangle$ se décompose* de manière unique *comme c.l. de $(u_i)_{1\leq i\leq n}$.*

Cas particuliers

1. La famille vide est libre.
2. La famille (a) est libre *ssi* $a \neq 0_E$.
3. Si $a \neq 0_E$, la famille (a, b) est libre *ssi* b n'est pas colinéaire à a.
4. "Toute sous-famille d'une famille libre est libre".
5. *Si* la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre *alors* les vecteurs u_i sont *tous non nuls, sans réciproque !* (*cf.* ex. 1)
6. *Si* la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre *alors* les vecteurs u_i sont *deux à deux distincts, sans réciproque !* (*cf.* ex. 1)

Exemple 1 *Dans $E = \mathbb{K}^2$ les vecteurs $u_1 = (1, 0)$, $u_2 = (0, 1)$ et $u_3 = (1, 1)$ sont non nuls et deux à deux distincts. Cependant $1.u_1 + 1.u_2 + (-1).u_3 = 0_E$ est une c.l. nulle non triviale de $(u_i)_{1\leq i\leq 3}$ de sorte que la famille n'est pas libre.*

Définition 2 *La famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est* liée *si elle n'est pas libre, càd s'il existe des scalaires λ^1, ..., λ^n* non tous nuls *tels que*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i u_i = 0_E.$$

C'est donc le cas notamment (mais pas seulement ! — *cf.* ex. 1.) lorsque l'un des vecteurs est nul, ou lorsque la famille contient deux vecteurs identiques. On peut contraposer 4. en : "toute sur-famille d'une famille liée est liée".

On remarque que par définition, "liée" est la négation de "libre" et que par conséquent, toute famille de vecteurs est libre ou bien liée.

La caractérisation la plus générale des familles libres ou liées est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1 *Si $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de vecteurs de E, il y a équivalence entre :*

1. *$(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est liée ;*
2. *Il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que u_{i_0} soit c.l. de $(u_i)_{i\neq i_0}$ (autrement dit, l'un des vecteurs de la famille est c.l. des* autres *vecteurs).*

Il faut noter qu'on n'a pas le choix de l'indice i_0 ; le th. affirme seulement son existence. Il ne permet pas de savoir *quel* vecteur est c.l. des autres. Le résultat suivant précise cette situation au prix d'hypothèses un peu plus fortes :

Théorème 2 *Si $n \in \mathbb{N}^*$, si $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille de vecteurs de E et si $(u_i)_{1\leq i\leq n-1}$ est libre, alors $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre* ssi *u_n n'est pas c.l. de $(u_i)_{1\leq i\leq n-1}$.*

Dans le cas où $E = \mathbb{K}[X]$ est le $\mathbb{K}$-ev des polynômes, il existe une condition *suffisante* commode permettant *dans certains cas* de constater qu'une famille est libre dans E :

Proposition 2 *Soit $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de polynômes* non nuls *de degrés* deux à deux distincts. *Alors $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.*

1.2 Familles génératrices ; bases

Définition 3 *La famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ de vecteurs de E est* génératrice (de E) *si le sev qu'elle engendre est égal à E :*

$$\left\langle (u_i)_{1\leq i\leq n}\right\rangle = E.$$

autrement dit : pour tout vecteur x de E, il existe une famille $\left(\lambda^i\right)_{1\leq i\leq n}$ de scalaires telle que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i u_i$, ou bien : x s'écrit comme c.l. de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$.

Si l'on ne considère que des familles finies, il n'est pas évident de trouver une famille génératrice (ce n'est d'ailleurs pas toujours possible). Si par contre on autorise des familles quelconques, alors évidemment la famille $(x)_{x\in E}$ ([1]) de tous les vecteurs de E engendre E. Toutefois nous serons amenés à exclure ce genre de situation.

Donnons des exemples plus particuliers :

[1] Càd la famille $(u_x)_{x\in E}$ définie par $u_x = x$ pour tout $x \in E$.

Exemple 2 *Dans le* $\mathbb{R}$*-ev* $\mathbb{C}$*, tout vecteur (complexe)* z *s'écrit* $z = x.1 + y.\mathrm{i}$ *donc : la famille* $(1, \mathrm{i})$ *est génératrice de* $\mathbb{C}$*. (Comme l'écriture* $z = x + \mathrm{i}\,y$ *est unique, elle est également libre.)*

Exemple 3 *Dans* $E = \mathbb{K}^n$ *on considère les vecteurs* $e_1 = (1, 0, ..., 0)$*,* $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$*,... ,* $e_n = (0, ..., 0, 1)$ *(*e_k *est le n-uplet constitué de* $(n-1)$ 0 *et d'un* 1 *à la* $k^{ième}$ *place). Alors si* $x = \left(x^1, ..., x^n\right) \in E$*, un calcul élémentaire montre que*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i\, e_i \qquad (1)$$

et donc que x *est c.l. de* $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$*. Donc :* $\mathcal{E}$ *est génératrice de* $\mathbb{K}^n$*. Par ailleurs, la formule* (1) *montre aussi l'unicité de l'écriture, de sorte que* $\mathcal{E}$ *est également libre.*

Exemple 4 *Dans* $E = \mathbb{K}_n[X]$*,* $\mathbb{K}$*-ev des polynômes de degré* $\leq n$*, tout polynôme* A *peut s'écrire*

$$A = \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i \qquad (2)$$

ce qui montre que la famille $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ *est génératrice de* $\mathbb{K}_n[X]$*. De plus, comme l'écriture* (2) *est unique,* $\mathcal{B}$ *est également libre.*

La condition "famille génératrice" énonce l'existence, pour tout vecteur de E, d'*au moins* une écriture comme c.l. de la famille, tandis que la liberté caractérise l'unicité de l'écriture — lorsqu'elle existe — *au plus* une écriture. Lorsqu'on réunit les deux on obtient la notion suivante :

Définition 4 *La famille* $\mathcal{B} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ *est une* base *du* $\mathbb{K}$*-ev* E *si elle est à la fois libre et génératrice de* E*. Cela signifie que tout vecteur de* E *s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de* $\mathcal{B}$ *:*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i\, u_i \qquad (3)$$

(décomposition de x *dans la base* $\mathcal{B}$*).*

Les n scalaires x^1, ..., x^n ne dépendent que du vecteur x (et bien sûr de la base $\mathcal{B}$).

On note pour $i = 1, ..., n$: $x^i = u^{*i}(x)$. On définit ainsi n applications u^{*1}, ..., u^{*n} de E dans $\mathbb{K}$.

Proposition 3 u^{*1}*, ...,* u^{*n} *sont* n *applications* linéaires *de* E *dans* $\mathbb{K}$ *(formes[2] linéaires sur* E*).*

Définition 5 u^{*1}*, ...,* u^{*n} *sont les* n formes linéaires coordonnées *dans la base* $\mathcal{B}$*.*

La formule (3) s'écrit alors :

$$x = \sum_{i=1}^{n} u^{*i}(x)\; u_i. \qquad (4)$$

[2] *forme* désigne une application à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Attention ! Les n coordonnées d'un vecteur x dans la base $\mathcal{B}$ dépendent *globalement* des vecteurs de $\mathcal{B}$, càd que si l'on modifie *un seul* vecteur u_{i_0} de $\mathcal{B}$, *a priori toute* coordonnée de x (et pas seulement x^{i_0}) est susceptible de changer. On ne peut donc pas parler de "la $i_0^{\text{ième}}$ coordonnée de x" ou même de "la coordonnée de x sur u_{i_0}".

Exemple 5 *La famille vide est une base du* $\mathbb{K}$*-ev réduit au vecteur nul* $\{0_E\}$*.*

Exemple 6 *Les exemples de familles génératrices donnés plus haut (2 à 4) sont en fait des exemples de bases :*

- $(1, \mathrm{i})$ *est une base du* $\mathbb{R}$*-ev* $\mathbb{C}$ *;*
- $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ *est une base du* $\mathbb{K}$*-ev* $\mathbb{K}^n$*. Cet exemple généralise le précédent. De plus, dans ce cas, la formule (4) prend une forme très simple puisque si* $x = \left(x^1, ..., x^n\right) \in \mathbb{K}^n$*, on a* $x = \sum_{i=1}^{n} x^i\, e_i$ *donc :* $e^{*i}(x) = x^i$ $(1 \leq i \leq n)$*. La base* $\mathcal{E}$ *est appelée* base canonique[3] *de* $\mathbb{K}^n$*.*
- *La famille* $\mathcal{B} = (1, X, ..., X^n)$ *est une base du* $\mathbb{K}$*-ev* $\mathbb{K}_n[X]$ *(également appelée base canonique de* $\mathbb{K}_n[X]$*).*

2 Application des bases

Dans les exemples précédents, nous explicitons une base des espaces vectoriels considérés. Il n'est pas certain que ce soit possible pour tout espace vectoriel. Nous admettons provisoirement le résultat du th. 7 : tout $\mathbb{K}$-ev admet des bases.

Les bases sont appropriées à l'étude des objets de l'algèbre linéaire. Une base bien choisie permet de construire une application linéaire ayant certaines propriétés, ou de faire apparaître une somme directe.

2.1 Bases et applications linéaires

Le théorème suivant montre comment étudier les propriétés d'une application linéaire en considérant les images des vecteurs d'une base :

Théorème 3 *Soient* E *et* F *des* $\mathbb{K}$*-ev et* $f \in \mathcal{L}(E, F)$*. Soit* $\mathcal{B} = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une base de* E *et notons* $\mathcal{V} = (v_i)_{1 \leq i \leq n} = (f(u_i))_{1 \leq i \leq n}$ *la famille des images par* f *des vecteurs de* $\mathcal{B}$*. Alors :*

1. f *est injective* ssi $\mathcal{V}$ *est libre ;*
2. f *est surjective de* E *sur* F ssi $\mathcal{V}$ *engendre de* F *;*
3. f *est un isomorphisme* ssi $\mathcal{V}$ *est une base de* F*.*

Il est possible de se servir d'une base de l'espace vectoriel de départ pour construire une application linéaire. Il suffit en fait de définir les images des vecteurs de la base et la linéarité fait le reste :

[3] "canonique" signifie "intrinsèque" (qui ne dépend d'aucun *choix*).

Théorème 4 *Soient E et F des $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{B} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\mathcal{V} = (v_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de vecteurs de F.* Il existe *une* unique *application* linéaire $f : E \to F$ *telle que $f(u_i) = v_i$ pour $i = 1, ..., n$. De plus on a pour tout $x \in E$:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} u^{*i}(x)\, v_i.$$

Ensuite on peut bien sûr utiliser le th. 3 pour juger des propriétés de l'application ainsi définie.

2.2 Bases et sommes directes

On obtient une décomposition d'un $\mathbb{K}$-ev en deux sev supplémentaires en partitionnant une base :

Théorème 5 *Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $\mathcal{B} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $p \in [\![0, n]\!]$. Notons $F = \langle u_1, ..., u_p\rangle$ et $G = \langle u_{p+1}, ..., u_n\rangle$. Alors : $E = F \oplus G$.*

Cette situation est générale : réciproquement, toute décomposition en somme de deux sev supplémentaires peut être regardée comme provenant du partitionnement d'une base :

Théorème 6 (base adaptée à une somme directe) *Soient E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev supplémentaires de E. Il existe une base $\mathcal{B} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ de E et un entier $p \in [\![0, n]\!]$ tels que :*

1. *$(u_i)_{1\leq i\leq p}$ soit une base de F ;*
2. *$(u_i)_{p+1\leq i\leq n}$ soit une base de G.*

3 Dimension des espaces vectoriels

On ne considère dans toute la suite que des espaces vectoriels E qui vérifient :

Hypothèse "de type fini" : E admet une famille génératrice *finie.*

Ce n'est pas toujours le cas ! *cf.* rem. 2.

3.1 Existence de bases

Pour construire une base d'un $\mathbb{K}$-ev, on peut prendre comme point de départ une famille génératrice ou une famille libre. Le premier résultat énonce que "de toute famille génératrice, on peut extraire une base" :

Lemme 1 *Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille* génératrice *de E. Il existe des indices i_1, ..., $i_n \in [\![1, p]\!]$ (deux à deux distincts) tels que $\mathcal{B} = (u_{i_1}, ..., u_{i_n})$ soit une base de E.*

Il en résulte la conséquence fondamentale suivante :

Théorème 7 *Tout $\mathbb{K}$-ev admet (au moins) une base.*

On peut aussi ajouter des vecteurs (pas n'importe lesquels !) à une famille libre pour la compléter en une base :

Théorème 8 (de la "base incomplète") *Soit $(u_1, ..., u_p)$ une famille* libre *de vecteurs du $\mathbb{K}$-ev E. Il existe des vecteurs u_{p+1}, ..., u_n de E tels que $\mathcal{B} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ soit une base de E.*

Corollaire 1 (existence d'un supplémentaire) *Tout sev d'un $\mathbb{K}$-ev E admet (au moins) un supplémentaire.*

Enfin, étant donnée une application linéaire f, il existe certaines bases de l'espace de départ, parfois appelées *bases adaptées* à f, dans lesquelles son expression est particulièrement simple :

Théorème 9 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Il existe une base $\mathcal{B} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ de E et un entier $p \in [\![0, n]\!]$ tels que :*

1. *$(f(u_1), ..., f(u_p))$ soit une base de* $\mathrm{Im}(f)$ *;*
2. *$(u_{p+1}, ..., u_n)$ soit une base de* $\ker(f)$*.*

Les résultats de ce paragraphe demeurent valides (bien que plus compliqués à justifier) en l'absence de l'hypothèse "de type fini".

3.2 Equicardinalité des bases

Il existe des conditions portant sur les cardinaux des familles libres ou génératrices. Elles sont toutes reliées au résultat fondamental du th. 10. Le lemme suivant montre que les vecteurs d'une famille libre ne peuvent pas être c.l. d'un nombre strictement inférieur de vecteurs.

Lemme 2 *Soient E un $\mathbb{K}$-ev, et $\mathcal{U} = (u_i)_{1\leq i\leq p}$ et $\mathcal{V} = (v_j)_{1\leq j\leq p+1}$ deux familles de vecteurs de E. Si pour $j = 1$, ..., $p + 1$, v_j est c.l. de $\mathcal{U}$ alors : $\mathcal{V}$ est liée.*

Autrement dit : "$p + 1$ vecteurs c.l. de p vecteurs sont liés". On en déduit le th. fondamental suivant :

Théorème 10 *Dans un $\mathbb{K}$-ev E, toutes les bases ont le même cardinal.*

On peut alors définir :

Définition 6 *La* dimension *d'un $\mathbb{K}$-ev E est le cardinal commun de toutes les bases de E, notée* $\dim_{\mathbb{K}}(E)$*.*

Telle que nous la définissons, c'est un *entier naturel.* C'est toujours le cas sous notre hypothèse "de type fini". Cependant, il existe des espaces vectoriels "de dimension infinie" dans lesquels cette hypothèse n'est pas vérifiée. Ainsi, dire qu' "un espace vectoriel E est de type fini" peut s'énoncer plus classiquement "E est *de dimension finie*".

Exemple 7 *Dans toutes les situations où l'on a pu expliciter une base de E, on connaît la dimension :*

1. $\dim_{\mathbb{K}}(\{0_E\}) = 0$ *;*
2. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n) = n$ *, en particulier $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1 ;*
3. $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ *puisque du point de vue linéaire $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (mais attention : $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, donc il peut être important de bien préciser le corps de base).*
4. $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

Toutefois, on pourra parfois calculer la dimension d'un espace vectoriel sans en expliciter une base.

3.3 Applications de la dimension

La dimension caractérise l'isomorphisme de deux espaces vectoriels :

Proposition 4 *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev. Il y a équivalence entre :*

1. $E \simeq_{\mathbb{K}} F$ *et*
2. $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

Le résultat suivant montre que les nombres de vecteurs des familles libres ou génératrices ne sont pas arbitraires :

Proposition 5 *Soit $\mathcal{U} = (u_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille de vecteurs du $\mathbb{K}$-ev E de dimension n.*

1. *Si $\mathcal{U}$ est libre, $p \leq n$;*
2. *Si $\mathcal{U}$ est génératrice, $p \geq n$.*

Remarque 1 *Cette propriété montre que* les *bases du $\mathbb{K}$-ev E sont* les *familles libres maximales (*resp. les *familles génératrices minimales) de E.*

Un cas particulier important est celui des familles qui comportent autant de vecteurs que la dimension de l'espace vectoriel ambiant :

Proposition 6 *Soit $\mathcal{U} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de $\boldsymbol{n}$ vecteurs du $\mathbb{K}$-ev E de dimension $\boldsymbol{n}$. Il y a équivalence entre :*

1. *$\mathcal{U}$ est libre ;*
2. *$\mathcal{U}$ est génératrice de E ;*
3. *$\mathcal{U}$ est une base de E.*

Remarque 2 *On peut voir ainsi que les espaces vectoriels où il existe des familles libres arbitrairement nombreuses ne sont pas de dimension finie. C'est le cas, p. ex., de $\mathbb{K}[X]$ où la famille $(1, X, ..., X^n)$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Un sous-espace vectoriel est de dimension plus petite que l'espace ambiant :

Proposition 7 *Soit F un sev du $\mathbb{K}$-ev E de dimension (*finie[4] *) $n \in \mathbb{N}$.*

1. $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leq \dim_{\mathbb{K}}(E)$ *;*
2. *Si* $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$*, $F = E$.*

La dimension joue ainsi vis-à-vis des notions linéaires un rôle analogue au cardinal pour les notions ensemblistes. Cela se constate encore sur les résultats suivants, obtenus en combinant les propriétés 3 et 5 :

Proposition 8 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies et f une application linéaire de E dans F.*

1. *Si f est injective,* $\dim_{\mathbb{K}}(E) \leq \dim_{\mathbb{K}}(F)$ *;*
2. *Si f est surjective,* $\dim_{\mathbb{K}}(E) \geq \dim_{\mathbb{K}}(F)$.

[4] Ces résultats ne sont plus valables en dimension infinie.

(La conjonction de ces deux propriétés a déjà été traitée ; c'est le th. 4.)

Proposition 9 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de* même *dimension (*finie[3] *) $n \in \mathbb{N}$. Soit f une application linéaire de E dans F. Il y a équivalence entre :*

1. *f est injective ;*
2. *f est surjective de E sur F ;*
3. *f est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev de E sur F.*

3.4 Calculs de dimension

Les résultats de dimension s'appuient sur la propriété fondamentale suivante :

Théorème 11 (th. fondamental de dimension) *Soit f une application linéaire du $\mathbb{K}$-ev E dans le $\mathbb{K}$-ev F. On a alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(\ker(f)).$$

On en déduit la dimension d'un $\mathbb{K}$-ev produit :

Proposition 10 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev. Alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E \times F) = \dim_{\mathbb{K}}(E) + \dim_{\mathbb{K}}(F).$$

Cette formule se généralise immédiatement par récurrence à un nombre quelconque de $\mathbb{K}$-ev.

Proposition 11 (formule de Grassmann) *Soient F et G deux sev du $\mathbb{K}$-ev E. Alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G) = \dim_{\mathbb{K}}(F + G) + \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G).$$

Dans le cas particulier d'une somme directe on obtient simplement :

Proposition 12 *Soient F et G deux sev du $\mathbb{K}$-ev E tels que la somme $F + G$ soit directe. Alors*

$$\dim_{\mathbb{K}}(F \oplus G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G).$$

4 Rang d'une famille de vecteurs

Soient u_1, ..., u_n n vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}$). Le *rang* de la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est :

$$\mathrm{rg}(u_i)_{1\leq i\leq n} = \dim_{\mathbb{K}}(\langle u_1, ..., u_n\rangle),$$

dimension du sev engendré par u_1, ..., u_n.

On peut alors remarquer que :

- $\mathrm{rg}(u_i)_{1\leq i\leq n} = 0$ *ssi* tous les u_i sont nuls (puisque alors $\langle u_1, ..., u_n\rangle = \{0_E\}$) ;
- $\mathrm{rg}(u_i)_{1\leq i\leq n} \leq n$, avec égalité *ssi* la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre (en effet, dans ce cas c'est en fait une base de $\langle (u_i)_{1\leq i\leq n}\rangle$) ;
- $\mathrm{rg}(u_i)_{1\leq i\leq n} \leq \dim_{\mathbb{K}}(E)$, avec égalité *ssi* la famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ est génératrice (puisque dans ce cas, on a $\langle (u_i)_{1\leq i\leq n}\rangle = E$) ;

- Si $r = \text{rg}(u_i)_{1\leq i\leq n}$ ($\leq \min(n, \dim_{\mathbb{K}}(E))$), il existe des indices deux à deux distincts i_1, ..., $i_r \in [\![1, n]\!]$ tels que $(u_{i_1}, ..., u_{i_r})$ soit une base de $\langle (u_i)_{1\leq i\leq n} \rangle$, puisque d'après la définition même de ce sev $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ en est une famille génératrice donc on peut en extraire une base (de $\langle (u_i)_{1\leq i\leq n} \rangle$!), qui est de cardinal r d'après la définition de celui-ci.

4.1 Opérations ne changeant pas le rang

Les modifications suivantes appliquées à une famille de vecteurs laissent inchangé son rang. Plus précisément elles ne modifient pas le sev engendré par la famille (et donc bien sûr *a fortiori* la dimension de celui-ci qui est le rang de la famille) :

- Supprimer un vecteur nul.

  En effet, un tel vecteur n'ajoute rien au sev engendré par la famille.

- Supprimer un vecteur figurant déjà dans la famille.

  De même. Bien évidemment on laisse subsister au moins un exemplaire de ce vecteur.

- Multiplier un vecteur par un scalaire *non nul.*

- Ajouter des multiples d'un vecteur aux *autres* vecteurs.

  En effet : notons $(u_1, ..., u_n)$ la famille initiale et soit $k \in [1, n]_{\mathbb{N}}$; on pose $u'_i = u_i + \lambda^i u_k$ pour $i \neq k$ (et $u'_k = u_k$). Alors clairement $u'_i \in \langle u_1, ..., u_n \rangle$ pour $i = 1$, ..., n d'où $\langle u'_1, ..., u'_n \rangle \subset \langle u_1, ..., u_n \rangle$. Mais d'autre part $u_i = u'_i - \lambda^i u'_k$ pour $i \neq k$ (et $u_i = u'_i$) d'où l'autre inclusion de même.

- Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des *autres* vecteurs.

  En effet soit maintenant $u'_k = u_k + \sum_{i\neq k} \lambda^i u_i$ (et $u'_i = u_i$ pour $i \neq k$). Alors comme précédemment l'inclusion $\langle u'_1, ..., u'_n \rangle \subset \langle u_1, ..., u_n \rangle$ est immédiate, mais inversement $u_k = u'_k - \sum_{i\neq k} \lambda^i u'_i$ (et $u_i = u'_i$ pour $i \neq k$) donnent l'inclusion inverse.

Ces remarques, combinées au th. 2, sont à la base de la *méthode du pivot* pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs.

4.2 Méthode du pivot

L'idée est d'effectuer des manipulations ne changeant pas le rang de la famille initiale afin de remplacer celle-ci par une autre dont le rang (identique) apparaît clairement. Regardons un exemple. Soient les vecteurs de $E = \mathbb{R}^4$:
$u_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On se base sur le premier **1** en haut à gauche pour faire apparaître des zéros comme premières coordonnées des autres vecteurs, formant ainsi la famille, de même rang que la précédente (u_1, u_2 sont inchangés) :
$u'_3 = u_3 - u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u'_4 = u_4 - 2u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On recommence pour les deuxièmes coordonnées (seulement avec u_2, u'_3 et u'_4 — on ne touche plus à u_1) :
$u''_3 = u'_3 + u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u''_4 = u'_4 + u_2 = 0_E$.

Aucune étape supplémentaire n'est nécessaire. La famille finale est "trapézoïdale". On fait alors le *raisonnement standard* suivant qu'il est important de connaître :

- $u''_3 \neq 0_E$ donc (u''_3) est une famille libre.
- u_2 n'est pas colinéaire à u''_3 (sinon sa deuxième coordonnée serait nulle) donc : (u_2, u''_3) est libre.
- u_1 n'est pas combinaison linéaire de (u_2, u''_3) (puisque sa première coordonnée est non nulle) donc: (u_1, u_2, u''_3) est libre, donc est de rang 3, or son rang est le même que celui de (u_1, u_2, u_3, u_4) donc : $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = 3$.

Cette remarque permet en outre de déterminer une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs initiaux :

$$0_E = u''_4 = u'_4 + u_2 = u_4 - 2u_1 + u_2.$$

5 Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev (de dimensions finies) et f une application linéaire de E dans F.

Définition 7 *Le* rang *de f est*

$$\text{rg}\,(f) = \dim_{\mathbb{K}} (\text{Im}\,(f)) .$$

Il découle immédiatement de cette définition que $\text{rg}\,(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} (F)$, avec égalité *ssi* f est surjective. En outre le th. 11 devient

Théorème 12 (théorème du rang) *Soit f une application linéaire du $\mathbb{K}$-ev E dans le $\mathbb{K}$-ev F. On a alors*

$$\dim_{\mathbb{K}} (E) = \text{rg}\,(f) + \dim_{\mathbb{K}} (\ker\,(f)) .$$

On voit alors que $\text{rg}\,(f) \leq \dim_{\mathbb{K}} (E)$, avec égalité *ssi* f est injective.

D'autre part, si $\mathcal{B} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de E, alors quelles que soient les propriétés de f, la famille $(f\,(u_i))_{1\leq i\leq n}$ est génératrice de $\text{Im}\,(f)$. Par conséquent :

Proposition 13 *Pour toute base $\mathcal{B} = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ de E,*

$$\text{rg}\,(f) = \text{rg}\,(f\,(u_i))_{1\leq i\leq n} .$$

On a enfin le résultat suivant, appelé *invariance par composition avec un isomorphisme* :

Proposition 14 *Dans la situation suivante :*

$$E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\psi} F'$$

si φ (resp. ψ) est un isomorphisme de E' sur E (resp. de F sur F') :

$$\text{rg}\,(f) = \text{rg}\,(f \circ \varphi) = \text{rg}\,(\psi \circ f) = \text{rg}\,(\psi \circ f \circ \varphi)$$

Ce résultat sera utile pour définir le *rang d'une matrice*, *cf.* le chapitre de calcul matriciel.