PCSI - mathématiques

Déterminants

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Applications multilinéaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E et F deux $\mathbb{K}$-ev et f une application de E^n dans F.

Définition 1 *f est* n-linéaire *de E^n dans F si f est "linéaire par rapport à chaque vecteur", càd si pour tout indice $i \in [\![1, n]\!]$, pour tous vecteurs $x_1,\ ...,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ ...,\ x_n \in E$ l'application*

$$x_i \mapsto f(x_1,\ ...,\ x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1},\ ...,\ x_n)$$

est linéaire de E dans F.

Exemple 1

- *Si $n = 1$, f est 1-linéaire de E dans F si et seulement si f est linéaire de E dans F.*
- *Si $n \geq 2$, la seule application n-linéaire et linéaire de E^n dans F est l'application nulle.*
- *La multiplication $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$; $(\lambda^1, ..., \lambda^n) \mapsto \prod_{i=1}^n \lambda^i$ est n-linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$.*

Remarque 1 *Soit f une application n-linéaire de E^n dans F.*

1. *Si $i \in [\![1, n]\!]$ est tel que $x_i = 0_E$, $f(x_1,\ ...,\ x_n) = 0_F$*
2. *f "se développe comme un produit", càd*

$$f\left(\sum_{1\leq i_1\leq p_1} \lambda_1^{i_1} x_{1,i_1},\ ...,\ \sum_{1\leq i_n\leq p_n} \lambda_n^{i_n} x_{n,i_n}\right) = \sum_{\substack{1\leq i_1\leq p_1 \\ \cdots \\ 1\leq i_n\leq p_n}} \lambda_1^{i_1} ... \lambda_n^{i_n} f(x_{1,i_1},\ ...,\ x_{n,i_n})$$

1.1 Applications multilinéaires antisymétriques, alternées

Soit $f : E^n \to F$ une application.

Définition 2 *f est*

- antisymétrique *si pour tous $x_1,\ ...,\ x_n \in E$ et pour tout couple (i, j) d'indices distincts de $[\![1, n]\!]$,*

$$f(x_1,\ ...,\ x_{i-1},\ x_j,\ x_{i+1}, ...,\ x_{j-1},\ x_i,\ x_{j+1},\ ...,\ x_n) = -f(x_1,\ ...,\ x_n)$$

- alternée *si pour tous $x_1,\ ...,\ x_n \in E$ et pour tout couple (i, j) d'indices distincts de $[\![1, n]\!]$,*
  $x_i = x_j \Rightarrow f(x_1,\ ...,\ x_n) = 0_F$.

En dehors de l'application nulle, il n'est pas facile d'expliciter des exemples de telles applications. Leur détermination est l'objet du paragraphe suivant.

Proposition 1 *Soit $f : E^n \to F$ une application.*

1. *Si f est antisymétrique, f est alternée.*
2. *Si f est alternée et n-linéaire, f est antisymétrique.*

Pour des applications n-linéaires, il n'y a donc pas de différence entre les notions d'alternance et d'antisymétrie.

Propriétés d'une application n-linéaire alternée

Soit $f : E^n \to F$ une application n-linéaire alternée. f est donc antisymétrique.

1. La valeur de f en $(x_1,\ ...,\ x_n)$ ne change pas si l'on ajoute à l'un des vecteurs x_i une c.l. $\sum_{j\neq i} \lambda^j x_j$ des *autres* vecteurs.
2. La valeur de f ne change pas si l'on ajoute des multiples $\lambda^j x_i$ de l'un des vecteurs x_i aux *autres* vecteurs.
3. La valeur de f en une famille $(x_1,\ ...,\ x_n)$ liée est 0_F.

2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

2.1 Formes n-linéaires alternées en dimension n

E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 3 *Une* forme n-linéaire alternée *sur E est une application n-linéaire alternée de E^n dans $\mathbb{K}$.*

Il est clair que l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-ev (sev de $\mathcal{F}(E^n, \mathbb{K})$).

Notation 1 *On note $\Lambda^{*n}(E)$ le $\mathbb{K}$-ev des formes n-linéaires alternées sur E.*

2.2 Étude en dimension 2

Fixons $n = 2$ et soit $\mathcal{U} = (u_1, u_2)$ une base de E. Soient x_1, x_2 deux vecteurs de E que l'on décompose sur $\mathcal{U}$:

$$x_j = x_j^1 u_1 + x_j^2 u_2$$

pour $j=1,\,2$ (càd, $u^{*i}(x_j)=x_j^i$). On calcule

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,x_2) &= \varphi\left(x_1^1u_1+x_1^2u_2,x_2^1u_1+x_2^2u_2\right)\\ &= x_1^1x_2^1\underbrace{\varphi(u_1,u_1)}_{=0}+x_1^1x_2^2\varphi(u_1,u_2)\\ &\quad +x_1^2x_2^1\underbrace{\varphi(u_2,u_1)}_{=-\varphi(u_1,u_2)}+x_1^2x_2^2\underbrace{\varphi(u_2,u_2)}_{=0}\\ &= \left(x_1^1x_2^2-x_1^2x_2^1\right)\varphi(u_1,u_2)\end{aligned}$$

La quantité $x_1^1x_2^2-x_1^2x_2^1$ est appelée *déterminant de* (x_1,x_2) *dans la base* $\mathcal{U}$, noté

$$\det_{\mathcal{U}}(x_1,x_2)=\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1\\ x_1^2 & x_2^2\end{vmatrix}.$$

Remarquons que $\det_{\mathcal{U}}(u_1,u_2)=1$.

2.3 Étude en dimension 3

Fixons $n=3$ et soit $\mathcal{U}=(u_1,u_2,u_3)$ une base de E. Soient x_1, x_2, x_3 trois vecteurs de E que l'on décompose sur $\mathcal{U}$:

$$x_j=x_j^1u_1+x_j^2u_2+x_j^3u_3$$

pour $j=1,\,2,\,3$ (càd, $u^{*i}(x_j)=x_j^i$). Alors

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,x_2,x_3) &= \varphi\left(\textstyle\sum_{i=1}^3 x_1^iu_i,\sum_{i=1}^3 x_2^iu_i,\sum_{i=1}^3 x_3^iu_i\right)\\ &= \sum_{\substack{1\le i_1\le 3\\1\le i_2\le 3\\1\le i_3\le 3}} x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}\varphi(u_{i_1},u_{i_2},u_{i_3})\end{aligned}$$

C'est une somme de 27 termes *a priori*. Mais pour chacun des 27 triplets (i_1,i_2,i_3) d'indices :

- si l'application $k\mapsto i_k$ n'est pas injective, $\varphi(u_{i_1},u_{i_2},u_{i_3})=0$ car φ est alternée ;
- si l'application $k\mapsto i_k$ est injective, c'est une bijection de $[\![1,3]\!]$.

On voit donc qu'il ne reste que $3!=6$ termes non nuls correspondant aux 6 bijections de $[\![1,3]\!]$. Il est facile de les écrire :

$$\begin{aligned}&\varphi(x_1,x_2,x_3)=\\ &\quad x_1^1x_2^2x_3^3\varphi(u_1,u_2,u_3)+x_1^2x_2^3x_3^1\underbrace{\varphi(u_2,u_3,u_1)}_{=\varphi(u_1,u_2,u_3)}\\ &+x_1^3x_2^1x_3^2\underbrace{\varphi(u_3,u_1,u_2)}_{=\varphi(u_1,u_2,u_3)}+x_1^2x_2^1x_3^3\underbrace{\varphi(u_2,u_1,u_3)}_{=-\varphi(u_1,u_2,u_3)}\\ &+x_1^3x_2^2x_3^1\underbrace{\varphi(u_3,u_2,u_1)}_{=-\varphi(u_1,u_2,u_3)}+x_1^1x_2^3x_3^2\underbrace{\varphi(u_1,u_3,u_2)}_{=-\varphi(u_1,u_2,u_3)}\end{aligned}$$

On peut alors mettre $\varphi(u_1,u_2,u_3)$ en facteur pour obtenir

$$\begin{aligned}\varphi(x_1,x_2,x_3) &= (x_1^1x_2^2x_3^3+x_1^2x_2^3x_3^1+x_1^3x_2^1x_3^2\\ &\quad -x_1^2x_2^1x_3^3-x_1^3x_2^2x_3^1-x_1^1x_2^3x_3^2)\,\varphi(u_1,u_2,u_3)\end{aligned}$$

L'expression qui apparaît en facteur de $\varphi(u_1,u_2,u_3)$ est le *déterminant dans la base* $\mathcal{U}$ des vecteurs x_1, x_2 et x_3, noté

$$\det_{\mathcal{U}}(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3\end{vmatrix}.$$

Son expression peut être retrouvée à l'aide de la règle de Sarrus :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & - & x_1^3x_2^2x_3^1\\
 & & & \nearrow & - & x_1^1x_2^3x_3^2\\
\left|x_1^1\right. & x_2^1 & \left.x_3^1\right| & \nearrow & - & x_1^2x_2^1x_3^3\\
\left|x_1^2\right. & x_2^2 & \left.x_3^2\right| & \nearrow & & \\
\left|x_1^3\right. & x_2^3 & \left.x_3^3\right| & & & \\
x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \searrow & & \\
x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \searrow & + & x_1^1x_2^2x_3^3\\
 & & & \searrow & + & x_1^2x_2^3x_3^1\\
 & & & & + & x_1^3x_2^1x_3^2
\end{array}$$

On observe encore que $\det_{\mathcal{U}}(u_1,u_2,u_3)=1$.

2.4 Déterminant d'une famille de vecteurs

Le théorème suivant récapitule les résultats obtenus en dimensions $n=2$ et 3. En l'admettant pour $n>3$, nous pouvons énoncer les propriétés ultérieures sous leurs formes les plus générales.

Théorème 1 *$\Lambda^{*n}(E)$ est de dimension 1 et si $\mathcal{U}=(u_1,\ ...,\ u_n)$ est une base de E, $(\det_{\mathcal{U}})$ est une base de $\Lambda^{*n}(E)$. De plus on a pour toute forme n-linéaire alternée φ sur E :*

$$\varphi=\varphi(u_1,\ ...,\ u_n)\,.\det_{\mathcal{U}}$$

Également, $\det_{\mathcal{U}}(u_1,\ ...,\ u_n)=1$.

Formule de changement de base

Soient $\mathcal{U}=(u_1,\ ...,\ u_n)$ et $\mathcal{V}=(v_1,\ ...,\ v_n)$ deux bases du $\mathbb{K}$-ev E. On a alors

$$\det_{\mathcal{V}}=\det_{\mathcal{V}}(u_1,\ ...,\ u_n)\det_{\mathcal{U}} \tag{1}$$

ce qui signifie que pour toute famille $(x_1\ ,...,\ x_n)$ de vecteurs de E :

$$\det_{\mathcal{V}}(x_1\ ,...,\ x_n)=\det_{\mathcal{V}}(u_1,\ ...,\ u_n)\det_{\mathcal{U}}(x_1\ ,...,\ x_n)\,.$$

On en déduit :

Théorème 2 *Pour toute famille $(x_1,\ ...,\ x_n)$ de vecteurs de E, il y a équivalence entre*

(1) *$(x_1,\ ...,\ x_n)$ est une base de E ;*

(2) $\det_{\mathcal{V}}(x_1,\ ...,\ x_n)\neq 0$.

Orientation d'un $\mathbb{R}$-ev.

Ici $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. Soient $\mathcal{U}=(u_1,\ ...,\ u_n)$, $\mathcal{V}=(v_1,\ ...,\ v_n)$ et $\mathcal{W}=(w_1,\ ...,\ w_n)$ trois bases de E. On note $\det_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})=\det_{\mathcal{U}}(v_1,\ ...,\ v_n)$ $(\in\mathbb{R}^*)$. On déduit de la formule (1) :

- $\det_{\mathcal{U}}(\mathcal{U})=1$;
- $\det_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})=\frac{1}{\det_{\mathcal{V}}(\mathcal{U})}$;
- $\det_{\mathcal{U}}(\mathcal{W})=\det_{\mathcal{U}}(\mathcal{V})\det_{\mathcal{V}}(\mathcal{W})$.

On définit la relation "*être de même sens*" notée $\sim$ par :

$$\mathcal{U} \sim \mathcal{V} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) > 0.$$

On déduit des remarques précédentes que "$\sim$" est une *relation d'équivalence* sur l'ensemble des bases de E. En outre

Proposition 2 *Il y a exactement deux* classes d'équivalence[1] *modulo* $\sim$.

Définition 4 Orienter E *c'est choisir une des deux classes d'équivalence modulo* $\sim$ *: classe des* bases directes *(l'autre est la classe des* bases indirectes*).*

Pratiquement On choisit une base $\mathcal{U}_0$ de E et on décide que $\mathcal{U}_0$ est directe. Alors pour toute base $\mathcal{U}$ de E :

- $\mathcal{U}$ est directe $\Leftrightarrow \mathcal{U}_0 \sim \mathcal{U} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{U}_0}(\mathcal{U}) > 0$;
- $\mathcal{U}$ est indirecte $\Leftrightarrow \mathcal{U}_0 \not\sim \mathcal{U} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{U}_0}(\mathcal{U}) < 0$.

Remarque 2 $\mathbb{R}^n$ *admet une orientation canonique : celle pour laquelle la base canonique est directe.*

Orientation induite

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F un hyperplan de E (sev de dimension $n-1$). Fixons $a \in E - F$: alors $E = F \oplus \langle a \rangle$. Par suite, si $\mathcal{U} = (u_1, \ ..., \ u_{n-1})$ est une base de F, $(u_1, \ ..., \ u_{n-1}, \ a)$ est une base de E que l'on note $\bar{\mathcal{U}}$. On a alors :

Proposition 3 *Il y a équivalence, pour* $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *bases de* F*, entre*

(1) $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{V}$ *sont de même sens (dans* F*) et*

(2) $\bar{\mathcal{U}}$ *et* $\bar{\mathcal{V}}$ *sont de même sens (dans* E*).*

On oriente E. On fixe une base $\mathcal{U}_0$ de F telle que $\bar{\mathcal{U}}_0$ soit directe dans E (il en existe). On oriente F en convenant que $\mathcal{U}_0$ est directe dans F. Pour cette orientation on a l'équivalence, pour toute base $\mathcal{U}$ de F, entre

(1) $\mathcal{U}$ est une base directe de F ;

(2) $\bar{\mathcal{U}}$ est une base directe de E.

Cette orientation de F s'appelle l'*orientation induite* sur F par l'orientation de E et le choix de a.

3 Déterminant d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme de E.

Soit $\varphi \in \Lambda^{*n}(E)$ une forme n-linéaire alternée sur E. On définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi_f : & E^n & \rightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, \ ..., \ x_n) & \mapsto & \varphi(f(x_1), \ ..., \ f(x_n)) \end{array}$$

[1] La classe d'équivalence de la base $\mathcal{U}$ est l'ensemble des bases qui sont de même sens que $\mathcal{U}$.

Il est clair que φ_f est une forme n-linéaire alternée sur E. Soit alors

$$\begin{array}{rccc} \Lambda^*(f) : & \Lambda^{*n}(E) & \rightarrow & \Lambda^{*n}(E) \\ & \varphi & \mapsto & \varphi_f \end{array}$$

$\Lambda^*(f)$ est évidemment un endomorphisme de $\Lambda^{*n}(E)$.

Lemme 1 *Si* F *est un* $\mathbb{K}$*-ev de dimension* 1*, tout endomorphisme de* F *est une homothétie.*

On en déduit que $\Lambda^*(f)$ est une homothétie de $\Lambda^{*n}(E)$, donc il existe un scalaire λ tel que $\Lambda^*(f) = \lambda \operatorname{Id}_{\Lambda^{*n}(E)}$, càd pour toute forme n-linéaire alternée φ sur E : $\varphi_f = \lambda\varphi$, ou encore pour toute famille $(x_1, \ ..., \ x_n)$ de vecteurs de E :

$$\varphi(f(x_1), \ ..., \ f(x_n)) = \lambda\varphi(x_1, \ ..., \ x_n).$$

Définition 5 *Le scalaire* λ *est le* déterminant *de* f *noté* $\det f$*.*

Il est donc *caractérisé* par

$$\varphi(f(x_1), \ ..., \ f(x_n)) = \det f . \varphi(x_1, \ ..., \ x_n) \qquad (2)$$

pour toute forme n-linéaire alternée φ sur E et pour toute famille $(x_1, \ ..., \ x_n)$ de vecteurs de E.

Soit $\mathcal{U} = (u_1, \ ..., \ u_n)$ une base de E. On a donc pour tous vecteurs x_1, ..., x_n de E :

$$\det_{\mathcal{U}}(f(x_1), \ ..., \ f(x_n)) = \det f . \det_{\mathcal{U}}(x_1, \ ..., \ x_n) \qquad (3)$$

En particulier si $x_i = u_i$ pour $i = 1$, ..., n :

$$\det f = \det_{\mathcal{U}}(f(u_1), \ ..., \ f(u_n)). \qquad (4)$$

Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

Proposition 4 *Si* f *et* g *sont deux endomorphismes de* E *on a :*

1. $\det(\operatorname{Id}_E) = 1$;
2. $\det(f \circ g) = \det(f) . \det(g)$;
3. $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.

En outre, le déterminant caractérise les automorphismes de E :

Proposition 5 *Si* $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$*, il y a équivalence entre*

(1) f *est un automorphisme de* E *;*

(2) $\det f \neq 0$
auquel cas $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det f}$.

4 Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n = 2$ ou 3.

Définition 6 *Le* déterminant *de* A *est*

- $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$ *si* $n = 2$ *;*

- $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$
  $= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$
  $- a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$
  si $n = 3$.

Il résulte immédiatement de cette définition que si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et si $\mathcal{U}$ est une base de E :

- Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de vecteurs de E et si $A = \mathrm{mat}(x_1, \ldots, x_n ; \mathcal{U})$:

$$\det(A) = \det_{\mathcal{U}}(x_1, \ldots, x_n) ;$$

- Si f est un endomorphisme de E et $A = \mathrm{mat}(f ; \mathcal{U})$:

$$\det(A) = \det(f).$$

On remarque en outre que pour toute matrice carrée A :

$$\det\left({}^tA\right) = \det(A).$$

Là encore, la définition n'est donnée qu'en dimensions 2 et 3. Mais en admettant les formules (1) et (2) on peut énoncer sous forme générale les propriétés théoriques du déterminant d'une matrice carrée :

Proposition 6 $\det(A)$ *est une forme n-linéaire alternée des lignes (*resp. *des colonnes) de A.*

Proposition 7 *Pour toutes matrices A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:*

1. $\det(I_n) = 1$;
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$;
3. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Le déterminant caractérise aussi les matrices inversibles :

Proposition 8 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il y a équivalence entre*

(1) $A \in GL_n(\mathbb{K})$;

(2) $\det(A) \neq 0$
auquel cas $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.

4.1 Calculs de déterminants

Déterminant d'une matrice triangulaire

Proposition 9 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire (supérieure ou inférieure),*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Corollaire 1 *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire est inversible* ssi *$a_{i,i} \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.*

Développement d'un déterminant

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si i, $j \in [\![1, n]\!]$ on note

- $A_{i,j}$ la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne j ;
- $M_{i,j} = \det(A_{i,j})$: *mineur* d'indice (i,j) de A ;
- $\gamma_{i,j} = (-1)^{i+j} M_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{i,j})$: *cofacteur* d'indice (i,j) de A ;

Théorème 3 (développement d'un déterminant) *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient p, $q \in [\![1, n]\!]$.*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{p,j}\gamma_{p,j}$$

(développement par rapport à la ligne p) et

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,q}\gamma_{i,q}$$

(développement par rapport à la colonne q).

Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on note encore

- $\mathrm{com}(A) = \left(\gamma_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$: *comatrice* de A (matrice des cofacteurs de A) ;
- $\tilde{A} = {}^t(\mathrm{com}(A))$: *matrice complémentaire* de A.

Corollaire 2 *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,*

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A) . I_n.$$

Corollaire 3 *Si $\det(A) \neq 0$, A est inversible et*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\, \tilde{A}.$$

Déterminant de Vandermonde

Si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ on note :

$$\begin{aligned} M(a_1, \ldots, a_n) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & & & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & & & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}, \\ V(a_1, \ldots, a_n) &= \det(M(a_1, \ldots, a_n)). \end{aligned}$$

(*déterminant de* VANDERMONDE[2] associé à $a_1, \ldots, a_n$).

Proposition 10 *Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$:*

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Corollaire 4 *$M(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible* ssi *$a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts.*

[2] Ce déterminant joue un grand rôle dans les problèmes d'interpolation (en lien avec les polynômes de LAGRANGE) et de réduction des endomorphismes, *cf.* cours de spé.