PCSI - mathématiques

Fonctions dérivables

1 Définitions et généralités

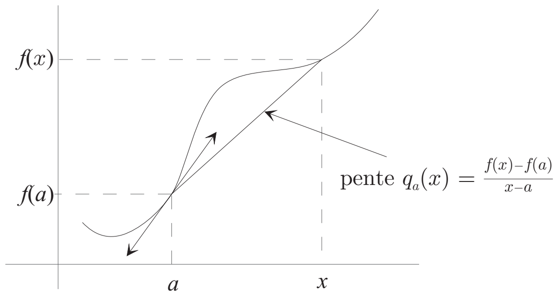
1.1 Dérivabilité en un point

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}$ contenant le réel a et vérifiant l'hypothèse $(\mathrm{H}_f(a))$ (*resp.* $(\mathrm{H}_f(a^+))$, $(\mathrm{H}_f(a^-))$) ([1]). (On dit que f est définie au voisinage de a (*resp.* à droite, à gauche).)

Définition 1 *f est* dérivable *(*resp. *dérivable* à droite , à gauche*) en a si le quotient*

$$q_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

*admet une limite quand $x \to a$ (*resp. *$x \to a^+$, $x \to a^-$) ; on note alors celle-ci $f'(a)$ (*resp. *$f'_d(a)$, $f'_g(a)$).*



On rencontre aussi les notations $Df(a)$ et $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.
On déduit des théorèmes sur les limites :

Proposition 1 *f est dérivable en a* ssi *f est dérivable à droite et à gauche en a et : $f'_d(a) = f'_g(a)$.*

Les définitions et résultats ultérieurs sont donnés pour f dérivable en a. Sauf mention explicite du contraire, ils s'appliquent aussi à f dérivable à droite / à gauche en a.
On déduit du th. de composition des limites :

Proposition 2 *f est dérivable en a ssi $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ admet une limite quand $h \to 0$, auquel cas cette limite est $f'(a)$.*

Définissons alors la fonction ε par $\varepsilon(0) = 0$ et $\varepsilon(h) = \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a)) - f'(a)$. Alors $\lim_0 \varepsilon = 0$ et :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h) \tag{1}$$

(encore valable pour $h = 0$). Réciproquement, s'il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 et un réel A tels que $f(a+h) = f(a) + hA + h\varepsilon(h)$, f est dérivable en a et $f'(a) = A$. La condition (1) *caractérise* donc la dérivabilité en a. Elle admet aussi l'importante conséquence suivante :

Proposition 3 Si *f est dérivable en a,* alors *f est continue en a.*

[1] *cf.* chapitre "fonctions numériques"

1.2 Dérivabilité globale

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur l'intervalle I (d'intérieur[1] non vide).

Définition 2

1. *f est* dérivable sur *I si*
   - *f est dérivable en x pour tout $x \in \mathring{I}$;*
   - *f est dérivable à droite en $\alpha = \inf I$ (si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in I$) ;*
   - *f est dérivable à gauche en $\beta = \sup I$ (si $\beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \in I$).*
2. *La* fonction dérivée *de f est alors*

$$f' : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \ \text{ si } x \in \mathring{I} \\ \alpha \mapsto f'_d(\alpha) \ \text{ (si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \in I) \\ \beta \mapsto f'_g(\beta) \ \text{ (si } \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \beta \in I) \end{array} \right.$$

   (aussi notée Df ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$).
3. *f est* de classe $\mathcal{C}^1$ *sur I si f est dérivable sur I et si $f' : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.*

1.3 Exemples

1.3.1 fonctions constantes

Si f est constante en c, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 0$ (fonction nulle). La réciproque de ce résultat élémentaire est étonnamment difficile à obtenir, *cf.* cor. 5.

1.3.2 fonctions affines

Si $f(x)$ est de la forme $\alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' est la fonction constante en α. Ce résultat généralise le précédent.

1.3.3 fonctions $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

La fonction $f : x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = nx^{n-1}$.

1.3.4 fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ / sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \neq 0$: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Ainsi le résultat précédent, obtenu pour $n \in \mathbb{N}^*$, est encore valable pour $n = -1$.

2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Combinaison linéaire

Proposition 4 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soient f, g définies au voisinage de a. Si f, g sont dérivables en a et si λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable en a et*

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

2.2 Produit

Proposition 5 *Soit $a \in \mathbb{R}$ et soient f, g définies au voisinage de a. Si f, g sont dérivables en a, fg est dérivable en a et*

$$(fg)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a).$$

On en déduit par récurrence sur n :

Corollaire 1 *Si $n \in \mathbb{N}^*$, si f_1, ..., f_n sont définies au voisinage de a et dérivables en a, il en est de même de $f_1...f_n$ et*

$$(f_1...f_n)'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_1(a)...f_{i-1}(a)\,f_i'(a)\,f_{i+1}(a)...f_n(a).$$

Dans le cas particulier où toutes les fonctions f_i sont égales on obtient :

Corollaire 2 *Si $n \in \mathbb{N}^*$, si f est définie au voisinage de a et dérivable en a, f^n est dérivable en a et*

$$(f^n)'(a) = nf'(a)\,(f(a))^{n-1}.$$

En combinant ces résultats avec la prop. 4, on en déduit que : toute fonction polynomiale est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

2.3 Inverse

Rappelons que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Proposition 6 *Si f est définie au voisinage de a, dérivable en a et si* $\boldsymbol{f(a) \neq 0}$, *$\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a, dérivable en a et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}$$

En combinant ce résultat avec la prop. 5, on en déduit un énoncé pour le quotient. Il en résulte que : toute fonction rationnelle est dérivable en tout point de son domaine de définition.

2.4 Composée

Le résultat suivant repose sur la relation (1). Il faut noter que, contrairement aux propriétés précédentes, ce th. *n'est pas valide* dans le cas de la dérivabilité à droite / à gauche seule.

Théorème 1 *Si f est définie au voisinage de a et dérivable en a, si g est définie au voisinage de $f(a)$ et dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\,f'(a).$$

2.5 Dérivée infinie

Soit f une fonction définie au voisinage de a (*resp.* à droite, à gauche).

Définition 3 *f admet une* dérivée infinie *en a (*resp. *à droite, à gauche en a) si $q_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite infinie en a (*resp. *à droite, à gauche en a).*

Attention ! Si f admet une dérivée infinie en a, f *n'est pas* dérivable en a. Malgré tout on note $f'(a) = \pm\infty$ (*resp.* $f_d'(a) = \pm\infty$, $f_g'(a) = \pm\infty$).

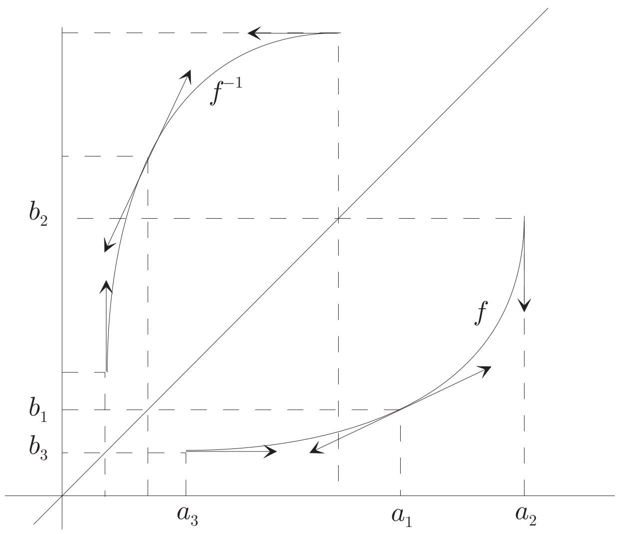
L'intérêt de cette définition est de permettre d'énoncer en toute généralité le résultat suivant.

2.6 Réciproque

Soient I et J deux intervalles d'intérieurs non vides et soit f un homéomorphisme de I sur J. Notons $g = f^{-1}$ la réciproque de f (homéomorphisme de J sur I). Rappelons que f et g sont en particulier des applications strictement monotones (de même sens).

Théorème 2 *Soit $b \in J$ et notons $a = g(b)$.*

1. *Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, g est dérivable en b et $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$;*
2. *Si f admet une dérivée infinie en a, g est dérivable en b et $g'(b) = 0$;*
3. *Si f est dérivable en a et si $f'(a) = 0$, g admet une dérivée infinie en b et $g'(b) = +\infty$ si $f \uparrow$, $-\infty$ si $f \downarrow$.*



Supposons maintenant la dérivabilité pour tous les points de I (*resp.* J) :

Difféomorphismes

Définition 4 *f est un* difféomorphisme *de I sur J si f est un homéomorphisme de I sur J tel que f soit dérivable sur I et f^{-1} dérivable sur J.*

En pratique, au lieu de vérifier la dérivabilité de f^{-1}, on utilise la condition suivante déduite du th. 2 :

Proposition 7 *Si f est un homéomorphisme de I sur J, il y a équivalence entre*

1. *f est un difféomorphisme de I sur J et*
2. *f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I.*

Exemple 1 *La fonction $\sqrt[p]{\ }$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

3 Étude globale des fonctions dérivables

3.1 Extrema locaux

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de a.

Définition 5 *f admet un* maximum (resp. minimum) local *en a s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in\ ]a-r, a+r[$:*

$$f(x) \leq f(a) \ \ (\text{resp. } f(x) \geq f(a)\,)$$

f admet un extremum local *en a si f admet un maximum ou un minimum local en a.*

On peut détecter les extrema éventuels des fonctions dérivables grâce à la condition :

Théorème 3 *Si f est dérivable en a et* si *f admet un extremum local en a* alors

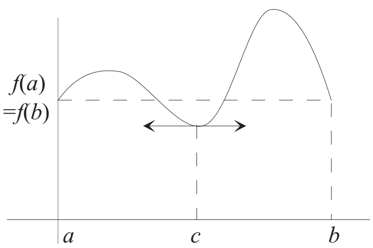
$$f'(a) = 0.$$

Attention ! Cette condition est nécessaire, *non suffisante*, comme le montre le contre-exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ en 0.

Le th. 3 fournit les importantes conséquences suivantes :

3.2 Accroissements finis

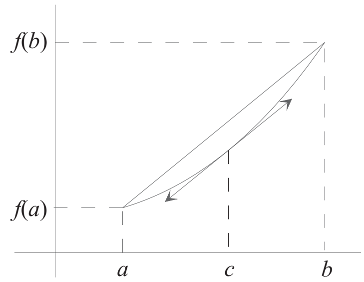
Théorème 4 (Rolle) *Soient a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a) = f(b)$, il existe[2] $c \in\ ]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$.*



Théorème 5 (formule des accroissements finis) *Soient a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe[2] $c \in\ ]a,b[$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)\, f'(c)\,.$$

[2] "Le" point c dont le th. affirme l'existence n'a aucne raison d'être *unique*.



On rencontre couramment l'autre forme de cette relation obtenue en posant $h = b - a$ et $\theta = \frac{c-a}{b-a}$ ($\in\ ]0,1[$) :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)\,.$$

Corollaire 3 (inégalité des accroissements finis) *Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et si $m \leq f' \leq M$ sur $]a,b[$ alors*

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Corollaire 4 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I, dérivable sur $\mathring{I}$ il y a équivalence entre*

1. *f est k-lipschitzienne sur I et*
2. *$|f'| \leq k$ sur $\mathring{I}$.*

Le cas particulier $k = 0$ donne (enfin !) :

Corollaire 5 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I, dérivable sur $\mathring{I}$ il y a équivalence entre*

1. *f est constante sur I et*
2. *$f' = 0$ sur $\mathring{I}$.*

Le th. suivant ne doit pas conduire à confondre *limite* et *valeur* de la dérivée :

Proposition 8 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I, dérivable en tout point de $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a et : $f'(a) = \ell$.*

L'inégalité des accroissements finis donne aussi accès à la caractérisation des variations à l'aide des dérivées :

3.3 Monotonie et dérivabilité

Théorème 6 ("large") *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I, dérivable sur $\mathring{I}$ il y a équivalence entre*

1. *f est croissante (*resp. *décroissante) sur I et*
2. *$f' \geq 0$ (*resp. *≤ 0) sur $\mathring{I}$.*

La caractérisation de la stricte monotonie est un peu plus délicate. La dérivée *peut* en effet s'annuler, comme on le voit grâce à la fonction $x \mapsto x^3$.

Théorème 7 ("strict") *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I, dérivable sur $\mathring{I}$ il y a équivalence entre*

1. *f est strictement croissante (*resp. *strictement décroissante) sur I et*
2. *$f' \geq 0$ (*resp. *≤ 0) sur $\mathring{I}$ et $\left\{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\right\}$, ensemble des valeurs d'annulation de f' sur $\mathring{I}$ est* d'intérieur vide[3].

[3] Càd, ne contient aucun intervalle ouvert non vide $]\alpha,\beta[$ $(\alpha < \beta)$.

4 Dérivations successives

4.1 Définitions

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, f est une application de I dans $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les notions "f est *n fois dérivable sur* I" et "$f^{(n)}$, *dérivée* $n^{i\grave{e}me}$ de f sur I" ([4]) de proche en proche sur l'entier n par :

- $(n = 1)$: f est une fois dérivable sur I si f est dérivable sur I, auquel cas $f^{(1)} = f'$;
- $(n \geq 2)$: f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ fois dérivable sur I et si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, et on pose alors $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

On dit que f est *de classe* $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On convient que $f^{(0)} = f$, et que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur I si f est continue sur I.

On note $\mathcal{D}^n(I)$ (*resp.* $\mathcal{C}^n(I)$) l'ensemble des fonctions n fois dérivables (*resp.* de classe $\mathcal{C}^n$) sur I. On a ainsi

$$... \supsetneq \mathcal{C}^{n-1}(I) \supsetneq \mathcal{D}^n(I) \supsetneq \mathcal{C}^n(I) \supsetneq \mathcal{D}^{n+1}(I) \supsetneq ...$$

On dit enfin que f est *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ sur I si f est n fois dérivable (ou : de classe $\mathcal{C}^n$) sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Fonctions n fois dérivables en un point

$f : I \to \mathbb{R}$ est définie au voisinage du réel a. $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 6 *f est n* fois dérivable en *a s'il existe $r > 0$ tel que f soit $(n-1)$ fois dérivable sur $]a-r, a+r[$ et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en a. On pose alors $f^{(n)}(a) = \left(f^{(n-1)}\right)'(a)$.*

Remarque 1 *Si I est un intervalle, f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en a pour tout $a \in I$.*

4.2 Opérations

La dérivation d'une combinaison linéaire (prop. 4) se généralise facilement :

Proposition 9 *Si f, $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables*[5] *sur I et si λ, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est n fois dérivable sur I et*

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}.$$

La relation pour le produit est moins simple à itérer et donne le

Théorème 8 (Leibniz) *Si f, $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I, il en est de même de fg et*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Quant aux formules pour l'inverse, la composée et la réciproque, elles ne donnent lieu à aucune généralisation pratique. On peut seulement exprimer des résultats qualitatifs à leur sujet.

On a enfin les notions de $\mathcal{D}^n$*-difféomorphisme* (*resp.* $\mathcal{C}^n$*-difféomorphisme*). On montre notamment :

Proposition 10 *Soit $f : I \to J$ un homéomorphisme de l'intervalle I sur l'intervalle J. Il y a équivalence entre*

1. *f est un $\mathcal{D}^n$-difféomorphisme (*resp. *$\mathcal{C}^n$-difféomorphisme) de I sur J et*
2. *f est n fois dérivable (*resp. *de classe $\mathcal{C}^n$) sur I et f' ne s'annule pas sur I.*

4.3 Formules de Taylor

4.3.1 Formule de Taylor-Young (*aspect local*)

Le théorème suivant permet p. ex. de préciser l'aspect local de la courbe représentative d'une fonction (place par rapport à sa tangente), notamment d'énoncer une condition suffisante d'extremum.

Théorème 9 (Taylor-Young) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage du réel a et n fois dérivable en a. Alors*

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} \left(f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right) = 0.$$

Cet énoncé sous forme de limite est plus facile à manipuler sous la forme équivalente suivante, obtenue en posant $\varepsilon(a) = 0$ et pour $x \neq a$:
$\varepsilon(x) = \frac{1}{(x-a)^n} \left(f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right)$:

$$\begin{cases} f(x) = f(a) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \\ \displaystyle\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \ (= \varepsilon(a)) \end{cases}$$

4.3.2 Formules de Taylor-Lagrange (*globales*)

Les formules suivantes, globales, se prêtent à la démonstration d'inégalités.

Théorème 10 (égalité de Taylor-Lagrange) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in \ ]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

La formule précédente est donnée à titre provisoire ; elle sera remplacée par la formule de Taylor avec reste intégral dans le chapitre sur l'intégrale de Riemann. L'énoncé suivant rend sensiblement les mêmes services, pour peu que l'on sache manier les inégalités et la valeur absolue :

Théorème 11 (inégalité de Taylor-Lagrange) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. Si $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ pour tout $x \in \ ]a,b[$ alors*

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

[4] $f^{(n)}$ est aussi notée $D^n f$ ou $\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

[5] Les propriétés de ce paragraphe sont énoncées pour des fonctions n fois dérivables sur un intervalle, mais on peut les formuler également pour des fonctions n fois dérivables en a.