

PCSI - mathématiques

Courbes paramétrées

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère $\mathcal{R} = (O ; (\vec{i}, \vec{j}))$ (non nécessairement orthonormal).

Préliminaire

Considérons les ensembles de points suivants :

- $\mathcal{C} = \{M = O + x\vec{i} + y\vec{j} \mid x^2 + y^2 = a^2 ; y \geq 0\}$. \mathcal{C} est l'image des applications

$$\begin{aligned} - F : [0, \pi] &\rightarrow \mathcal{P} : \theta \mapsto O + a \cos \theta \vec{i} + a \sin \theta \vec{j} ; \\ - G : [-a, a] &\rightarrow \mathcal{P} : x \mapsto O + x\vec{i} + \sqrt{a^2 - x^2}\vec{j}. \end{aligned}$$

F et G sont deux paramétrages de \mathcal{C} de natures différentes puisque F est indéfiniment dérivable alors que G n'est pas dérivable en $\pm a$. On peut passer de F à G par $F = G \circ \varphi$ où $\varphi(\theta) = a \cos \theta$ pour $\theta \in [0, \pi]$, et $G = F \circ \psi$ où $\psi(x) = \varphi^{-1}(x) = \arccos \frac{x}{a}$ pour $x \in [-a, a]$.

- $\mathcal{H} = \{M = O + x\vec{i} + y\vec{j} \mid x^2 - y^2 = 1 ; y \geq 0\}$. \mathcal{H} est l'image des applications

$$\begin{aligned} - F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{P} ; y \mapsto O + \sqrt{1 + y^2}\vec{i} + y\vec{j} ; \\ - G : \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{P} ; t \mapsto O + \text{ch } t \vec{i} + \text{sh } t \vec{j} ; \\ - H :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&\rightarrow \mathcal{P} ; \theta \mapsto O + \frac{1}{\cos \theta}\vec{i} + \tan \theta \vec{j}. \end{aligned}$$

Les trois paramétrages F , G et H sont indéfiniment dérivables. On peut passer de l'un à l'autre ; p. ex. $H = F \circ \varphi$ où $\varphi(\theta) = \tan \theta$ pour $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; $F = H \circ \psi$ où $\psi(y) = \arctan y$ pour $y \in \mathbb{R}$.

1 Arcs paramétrés plans

Définition 1 Un arc paramétré \mathcal{C}^k de \mathcal{P} est une application de classe \mathcal{C}^k (1) d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathcal{P} .

Différents paramétrages peuvent représenter la même "courbe" (arc géométrique). Dans la suite de ce chapitre, on s'intéressera aux propriétés géométriques intrinsèques des courbes. On admettra que les définitions suivantes ne dépendent pas du paramétrage adopté.

Soit $F : I \rightarrow \mathcal{P}$ un arc paramétré \mathcal{C}^k .

- Le support (ou image) de F est l'image (au sens ensembliste) de l'application F :

$$\gamma = \text{Im}(F) = \{F(t) \mid t \in I\}.$$

Soit M un point de $\gamma = \text{Im}(F)$.

¹Càd, une application k fois dérivable dont la dérivée $k^{\text{ième}}$ est continue - cf. cours d'analyse.

- L'ordre de multiplicité de M sur γ est le nombre m de paramètres distincts de I ayant pour image M . Plus formellement : $m = \text{card}(\{t \in I \mid F(t) = M\})$. Si $m = 1$ on dit que M est point simple de γ , sinon M est point multiple : point double si $m = 2$, triple si $m = 3$, etc.

- L'arc $\gamma = \text{Im}(F)$ est simple si tous ses points sont simples. Cela revient à dire que le paramétrage F est injectif.

- L'arc $\gamma = \text{Im}(F)$ est compact si l'intervalle de départ I du paramétrage F est un segment.

2 Étude locale

On se propose dans cette partie de préciser l'allure d'un arc paramétré au voisinage d'un point. On sera amené à admettre provisoirement certains résultats d'analyse.

Soit $\gamma = \text{Im}(F)$ un arc paramétré \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $k \geq 2$. Soit $M_0 = F(t_0)$ un point de γ . Pour $p = 1, \dots, k$, si $\vec{F}(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, le vecteur dérivé $p^{\text{ième}}$ de F en t est $\vec{F}^{(p)}(t) = x^{(p)}(t)\vec{i} + y^{(p)}(t)\vec{j}$.

- M_0 est dit régulier (resp. stationnaire ou singulier) si $\vec{F}'(t_0) \neq \vec{0}$ (resp. $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$). L'arc γ est dit régulier si tous ses points sont réguliers.

- Si M_0 est régulier, on dit que M_0 est un point ordinaire si $\vec{F}''(t_0)$ n'est pas colinéaire à $\vec{F}'(t_0)$. Dans le cas contraire on dit que M_0 est point d'inflexion géométrique.

On suppose que k est suffisant pour que l'on puisse définir les deux indices suivants :

- $p = \min(i \in \llbracket 1, k \rrbracket \mid \vec{F}^{(i)}(t_0) \neq \vec{0})$: indice du premier vecteur dérivé non nul en t_0 ;
- $q = \min(i \in \llbracket 1, k \rrbracket \mid \vec{F}^{(i)}(t_0) \text{ non col. à } \vec{F}^{(p)}(t_0))$: indice du premier vecteur dérivé t_0 non colinéaire au précédent.

On va vérifier que les paramètres p et q gouvernent l'allure locale de γ en M_0 . Il sera pratique de noter $\vec{v}_i = \vec{F}^{(i)}(t_0)$ pour $1 \leq i \leq k$. Les définitions de p et q se traduisent par :

- $\vec{v}_i = \vec{0}$ pour $1 \leq i < p$;
- $\vec{v}_p \neq \vec{0}$;
- $\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_p$ pour $p < i < q$;
- \vec{v}_q non colinéaire à \vec{v}_p .

Notons que par rapport aux définitions du 1,

- M_0 est régulier (*resp.* stationnaire) si $p = 1$ (*resp.* $p \geq 2$) ;
- M_0 est point ordinaire (*resp.* d'inflexion géométrique) si $p = 1$ et $q = 2$ (*resp.* $p = 1$ et $q \geq 3$).

On montrera notamment que la droite passant par M_0 et dirigée par \vec{v}_p est la tangente à γ en M_0 .

Écrivons pour F la formule de TAYLOR-YOUNG² à l'ordre q en t_0 . On obtient, pour tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $t_0 + h \in I$:

$$F(t_0 + h) = F(t_0) + \sum_{i=1}^q \frac{h^i}{i!} \vec{F}^{(i)}(t_0) + h^q \vec{\varepsilon}(h)$$

où $\vec{\varepsilon}$ est une fonction telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$. Calculons dans le repère local $(M_0 ; (\vec{v}_p, \vec{v}_q))$: compte tenu des notations définies plus haut, on obtient

$$F(t_0 + h) = M_0 + \sum_{i=1}^q \frac{h^i}{i!} \vec{v}_i + h^q (\varepsilon_1(h) \vec{v}_p + \varepsilon_2(h) \vec{v}_q)$$

en posant $\vec{\varepsilon}(h) = \varepsilon_1(h) \vec{v}_p + \varepsilon_2(h) \vec{v}_q$. Exprimons le vecteur $\overrightarrow{M_0 F(t_0 + h)}$ en fonction de \vec{v}_p et \vec{v}_q en tenant compte des relations vérifiées par les \vec{v}_i :

$$\begin{aligned} F(t_0 + h) &= M_0 + \left(\frac{h^p}{p!} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{q-1} \frac{h^i}{i!} + h^q \varepsilon_1(h)}_{h^p \omega(h)} \right) \vec{v}_p \\ &\quad + \left(\frac{h^q}{q!} + h^q \varepsilon_2(h) \right) \vec{v}_q \\ &= M_0 + X(h) \vec{v}_p + Y(h) \vec{v}_q \end{aligned}$$

où

$$X(h) = \frac{h^p}{p!} + h^p \omega(h) ; Y(h) = \frac{h^q}{q!} + h^q \varepsilon_2(h),$$

les deux fonctions ω et ε_2 ayant pour limite 0 en 0. On déduit de ce calcul les résultats suivants :

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(h)}{h^p/p!} = 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(h)}{h^q/q!}$ (on dit que $X(h)$ et $Y(h)$ sont *équivalents*² à $\frac{h^p}{p!}$ et $\frac{h^q}{q!}$, respectivement). Par conséquent, les signes de $X(h)$ et $Y(h)$ pour $h > 0$ voisin de 0 sont > 0 , tandis que pour $h < 0$ ils dépendent de la parité de p et de q .
- (comme $p < q$) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Y(h)}{X(h)} = 0$ (on dit que $Y(h)$ est *négligeable*² devant $X(h)$). Cela signifie que dans le repère local $(M_0 ; (\vec{v}_p, \vec{v}_q))$, l'ordonnée tend vers 0 infiniment plus vite que l'abscisse. Donc le point $F(t_0 + h)$ se rapproche arbitrairement de la droite $\mathcal{T}_{M_0} = M_0 + \langle \vec{v}_p \rangle$ lorsque $h \rightarrow 0$. Ainsi, cette droite est bien celle qui "ressemble le plus à γ " au voisinage du point M_0 (*tangente* à γ en M_0).

² cf. cours d'analyse, où ces notions seront détaillées.

Précisons pour finir les différents aspects locaux possibles de γ en fonction des signes de p et q :

p impair	
<p>q pair</p> <p>disposition ordinaire</p>	<p>q impair</p> <p>disposition d'inflexion</p>
p pair	
<p>q impair</p> <p>point de rebroussement de 1^{ère} espèce</p>	<p>q pair</p> <p>point de rebroussement de 2^{ème} espèce</p>

3 Branches infinies

Soit γ un arc paramétré \mathcal{C}^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, image du paramétrage

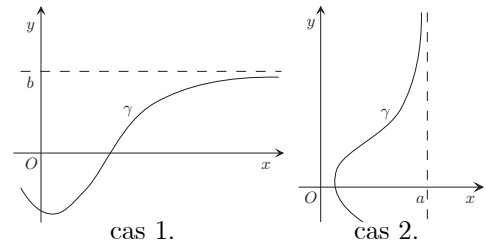
$$\begin{aligned} F : I &\rightarrow \mathcal{P} \\ t &\mapsto M = F(t) = O + x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} \end{aligned}$$

On note \mathcal{B} une condition d'étude de limite appropriée à l'intervalle I , p. ex.

- $\mathcal{B} = [t \rightarrow \alpha^+]$ ou $\mathcal{B} = [t \rightarrow \beta^-]$ si $I \supset]\alpha, \beta[$;
- $\mathcal{B} = [t \rightarrow +\infty]$ si $I \supset]\alpha, +\infty[$ etc. (2).

γ présente une *branche infinie* selon \mathcal{B} si $\lim_{\mathcal{B}} \left\| \overrightarrow{OF}(t) \right\| = +\infty$ (ceci ne dépend pas de l'origine O choisie dans \mathcal{P}). Pour préciser l'allure d'une courbe présentant une telle disposition, on est conduit à distinguer les cas particuliers³ suivants. On se limitera notamment aux cas où $x(t)$ ou $y(t)$ admet une limite infinie selon \mathcal{B} .

1. $\lim_{\mathcal{B}} x(t) = \pm\infty$; $\lim_{\mathcal{B}} y(t) = b \in \mathbb{R}$.
Le point $F(t)$ se rapproche arbitrairement de la droite $\mathcal{D} \mid y = b$ (sa distance à cette droite tend vers 0). On dit que \mathcal{D} est *asymptote* à γ selon \mathcal{B} .
2. $\lim_{\mathcal{B}} x(t) = a \in \mathbb{R}$; $\lim_{\mathcal{B}} y(t) = \pm\infty$.
Le point $F(t)$ se rapproche arbitrairement de la droite $\mathcal{D} \mid x = a$, qui est asymptote à γ selon \mathcal{B} .



³ Attention, il ne s'agit *que* de cas particuliers. Des courbes très simples, p. ex. la courbe représentative de $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$, n'entrent pas dans cette classification. On rencontrera d'autres types de branches infinies dans l'étude des courbes "en polaires", cf. chapitre suivant.

3. $\lim_{\mathcal{B}} x(t) = \pm \lim_{\mathcal{B}} y(t) = \pm \infty$.

Dans ce cas envisageons le rapport $\frac{x(t)}{y(t)}$ (ou $\frac{y(t)}{x(t)}$) pour préciser les ordres de grandeur respectifs des coordonnées $x(t)$ et $y(t)$.

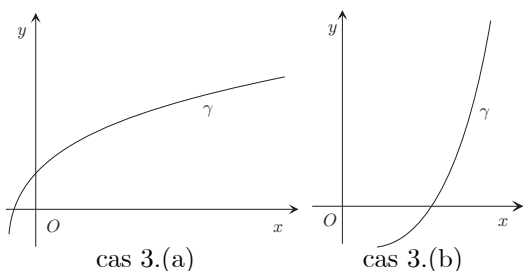
Là encore, on se limite à des situations particulières.

(a) $\lim_{\mathcal{B}} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$.

$y(t)$ est négligeable devant $x(t)$ selon \mathcal{B} (le point $F(t)$ s'éloigne préférentiellement selon l'axe Ox). On dit que γ admet une *branche parabolique horizontale* (ou : de direction \vec{i}).

(b) $\lim_{\mathcal{B}} \frac{x(t)}{y(t)} = 0$.

$x(t)$ est négligeable devant $y(t)$ selon \mathcal{B} (le point $F(t)$ s'éloigne préférentiellement selon l'axe Oy). On dit que γ admet une *branche parabolique verticale* (ou : de direction \vec{j}).

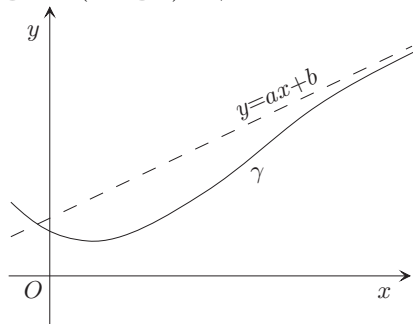


(c) $\lim_{\mathcal{B}} \frac{y(t)}{x(t)} = a \in \mathbb{R}^*$.

Le point $F(t)$ s'éloigne plus particulièrement dans la direction du vecteur $\vec{i} + a\vec{j}$. D'ores et déjà cette situation porte un nom : on dit que γ admet une *direction asymptotique* de pente a (ou : du vecteur $\vec{i} + a\vec{j}$). Adoptons celui-ci comme deuxième vecteur du repère. Cela revient à considérer la quantité $y(t) - ax(t)$. Mentionnons les situations classiques (mais non générales) :

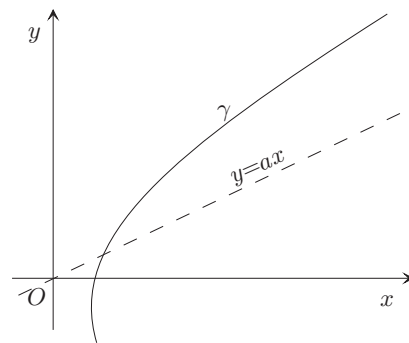
i. $\lim_{\mathcal{B}} y(t) - ax(t) = b \in \mathbb{R}$.

La distance du point $F(t)$ à la droite $\mathcal{D} \mid y = ax + b$ tend vers 0 selon \mathcal{B} . Cette droite est asymptote (oblique) à γ selon \mathcal{B} .



ii. $\lim_{\mathcal{B}} y(t) - ax(t) = \pm \infty$.

Bien que s'éloignant dans une direction générale de pente a , le point $F(t)$ s'éloigne arbitrairement de toute droite de pente a . γ admet une *branche parabolique de pente a* (ou : de direction $\vec{i} + a\vec{j}$).



4 Plan d'étude d'un arc paramétré

On calcule dans le repère $\mathcal{R} = (O ; (\vec{i}, \vec{j}))$ de \mathcal{P} .

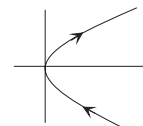
On étudie la courbe γ image de $t \mapsto M = F(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ où $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Le domaine de F est $\mathcal{D}(F) = \mathcal{D}(x) \cap \mathcal{D}(y)$. En général, ce domaine est une réunion d'intervalles disjoints $I_1 \cup \dots \cup I_m$ sur lesquels F est de classe⁴ \mathcal{C}^k ($k \in \mathbb{N}^*$). On a donc à étudier k arcs paramétrés, les restrictions $F|_{I_1}, \dots, F|_{I_m}$. Leur réunion est la courbe γ .

Si $t \in \mathcal{D}(F)$, $\vec{F}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ et plus généralement $\vec{F}^{(p)}(t) = x^{(p)}(t)\vec{i} + y^{(p)}(t)\vec{j}$ pour $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$. On construit les tableaux de variations de x et y sur I_1, \dots, I_m (en y faisant figurer les limites), p. ex. :

t	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$		
$x'(t)$	+	0	-		-	0	+
$y'(t)$	-	0	+		+	$\neq 0$	+
x	□ ↗	□	□ ↘		□ ↘	□	□ ↗
y	□ ↘	□	□ ↗		□	□ ↗	□

On met ainsi en évidence les branches infinies et les points stationnaires ($t = a$ dans l'exemple). Chacun d'eux nécessite une étude particulière.

Les points à tangentes parallèles aux axes servent à préciser le tracé. P. ex., en $t = c$ la situation est comme ci-contre :



Rappelons que

- $M_0 = F(t_0)$ est point stationnaire si $\vec{F}'(t_0) = \vec{0}$, auquel cas la tangente en M_0 est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul rencontré en t_0 .
- Sinon (M_0 point régulier), la tangente à γ en $M_0 = F(t_0)$ a pour équation $\begin{vmatrix} x-x(t_0) & x'(t_0) \\ y-y(t_0) & y'(t_0) \end{vmatrix} = 0$.
- M_0 (régulier) est point d'inflexion géométrique si $\begin{vmatrix} x'(t_0) & x''(t_0) \\ y'(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix} = 0$. Donc pour chercher un point d'inflexion géométrique sur un domaine où x' (resp. y') ne s'annule pas on peut étudier la condition $\left(\frac{y'}{x'}\right)' = 0$ (resp. $\left(\frac{x'}{y'}\right)' = 0$).

Les symétries et périodicités éventuelles de x et y permettent de limiter l'intervalle d'étude. P. ex. si $T > 0$ est période de x et y , on obtient toute la courbe en faisant décrire à t un intervalle de longueur T .

⁴ cf. note 1 p.1.

Remarque 1 Si γ est donnée sous la forme $y = f(x)$, le paramétrage de γ est $x \mapsto F(x) = O + x\vec{i} + f(x)\vec{j}$. Les vecteurs dérivés sont $\vec{F}'(x) = \vec{i} + f'(x)\vec{j}$ et pour $p \geq 2$, $\vec{F}^{(p)}(x) = f^{(p)}(x)\vec{j}$. $\vec{F}'(x) \neq \vec{0}$ donc γ n'admet pas de point stationnaire. Les inflexions géométriques se produisent pour $\left| \frac{f^{(1)}(x)}{f^{(2)}(x)} \right| = 0 = f''(x)$, ce qui redonne la condition bien connue.

5 Exemples

1. $x(t) = 2t^3 - 3t^2$; $y(t) = 3t^2 - 6t$

Le domaine est \mathbb{R} ; le paramétrage est \mathcal{C}^∞ (indéfiniment dérivable). On calcule les dérivées :

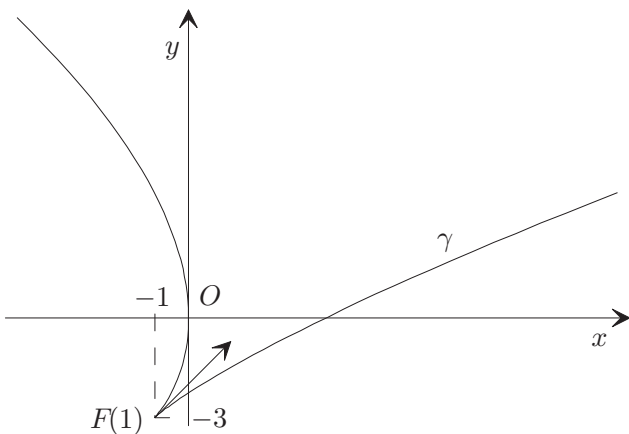
- $x'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t - 1)$ (0, 1) ;
- $y'(t) = 6t - 6 = 6(t - 1)$ (1)

On a donc les tableaux de variations suivants :

t	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x'(t)$		+	0	-
$y'(t)$		-	$\neq 0$	+
x	$-\infty$	\nearrow 0	\searrow -1	\nearrow $+\infty$
y	$+\infty$	\searrow	-3	\nearrow $+\infty$

Il y a :

- une branche infinie pour $t \rightarrow \pm\infty$. Dans cette situation $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{3t^2 - 6t}{2t^3 - 3t^2} \rightarrow 0$: c'est une branche parabolique horizontale.
- un point de rebroussement en $M_1 = F(1)$. Calculons les premiers vecteurs dérivés : $\vec{F}'(t) = \begin{pmatrix} 6t^2 - 6t \\ 6t - 6 \end{pmatrix}$ est nul en $t = 1$. $\vec{F}''(t) = \begin{pmatrix} 12t - 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc $\vec{F}''(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ d'où l'on déduit que M_1 est un point de rebroussement ("p = 2") et que la tangente en M_1 est dirigée par le vecteur $6\vec{i} + 6\vec{j} = 6(\vec{i} + \vec{j})$, donc elle a pour pente 1. $\vec{F}'''(t) = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\vec{F}'''(1) = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{F}''(1)$ donc "q = 3" et M_1 est un point de rebroussement de première espèce. On peut alors préciser l'allure de la courbe :



2. $x(t) = \frac{e^t}{t+1}$; $y(t) = \frac{te^t}{t+1}$
 Le domaine est $\mathcal{D}(F) =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[= I_1 \cup I_2$. Le paramétrage est \mathcal{C}^∞ . Étudions les variations :

- $x'(t) = \frac{e^t(t+1) - e^t \cdot 1}{(t+1)^2} = \frac{te^t}{(t+1)^2}$ est du signe de t ;
- $y(t) = tx(t)$ donc $y'(t) = tx'(t) + x(t) = \frac{t^2 e^t}{(t+1)^2} + \frac{e^t}{t+1} = \frac{(t^2 + t + 1)e^t}{(t+1)^2}$ (toujours > 0).

Il n'y a donc pas de point stationnaire sur cet arc. Les variations sont particulièrement simples :

	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x'(t)$		-		-
$y'(t)$		+		+
x	0	\searrow $-\infty$		$+\infty$ \searrow 0 \nearrow $+\infty$
y	0	\nearrow $+\infty$		$-\infty$ \nearrow $+\infty$

Il y a par contre deux branches infinies :

- pour $t \rightarrow +\infty$: comme $y(t) = tx(t)$, $\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{1}{t} \rightarrow 0$ donc il s'agit d'une branche parabolique verticale.
- pour $t \rightarrow -1^\pm$: $\frac{y(t)}{x(t)} = t \rightarrow -1$ (= "a") donc il y a une direction asymptotique de pente 1 ; $y(t) - ax(t) = y(t) + x(t) = \frac{te^t}{t+1} + \frac{e^t}{t+1} = e^t \rightarrow e^{-1} = \frac{1}{e}$ donc la droite \mathcal{A} d'équation $y = -x + \frac{1}{e}$ est asymptote à γ pour $t \rightarrow -1^\pm$. Comme la limite est $(\frac{1}{e})^-$ en -1^- (resp. $(\frac{1}{e})^+$ en -1^+) on peut même préciser que γ est au-dessous (resp. au-dessus) de \mathcal{A} pour $t < -1$ (resp. $t > -1$).

Il serait intéressant de préciser comment γ s'approche de l'origine pour $t \rightarrow -\infty$. C'est facile grâce à $\frac{y(t)}{x(t)} = t \rightarrow -\infty$ donc si l'on ajoute le point O à γ , il y aura une demi-tangente verticale en ce point.

