PCSI - mathématiques

Coniques

$\mathcal{P}$ est $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure affine euclidienne (et orienté). On utilisera lorsque nécessaire un repère orthonormal de vecteurs directeurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

1 Equations polaires des coniques

F est un point de $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{P}$ ne passant pas par F, $e \in \mathbb{R}$, $e > 0$.

Définition 1 *La* conique *de* foyer F*, de* directrice $\mathcal{D}$ *et d'*excentricité e *est*

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \,|\, d(M, F) = e\, d(M \,;\, \mathcal{D})\}$$

- *Si* $0 < e < 1$, $\mathcal{C}$ *est une* ellipse
- *Si* $e = 1$, $\mathcal{C}$ *est une* parabole
- *Si* $e > 1$, $\mathcal{C}$ *est une* hyperbole

On pose en outre :

- $H = p_{\mathcal{D}}(F)$; $h = d(F \,;\, \mathcal{D}) = d(F, H)$;
- $p = e\,h$: *paramètre* de $\mathcal{C}$;
- $\Delta = (FH)$: *grand axe* de $\mathcal{C}$.

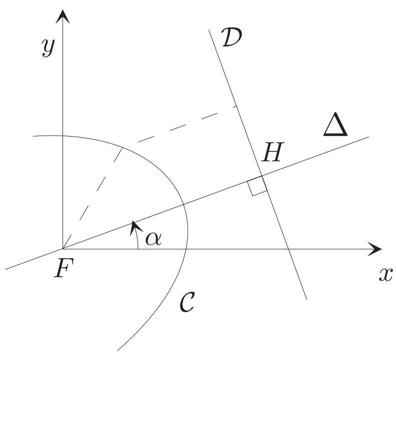
Remarque 1 *D'après le définition de* $\mathcal{C}$*,* $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow s_\Delta(M) \in \mathcal{C}$*.* Δ *est donc* axe de symétrie *de* $\mathcal{C}$*.*

$\mathcal{D}$ est définie par $\overrightarrow{FH} = h\,\vec{u}(\alpha)$ normal à $\mathcal{D}$ donc admet pour équation : $\mathcal{D} \,|\, \left(\overrightarrow{HM} \,|\, \vec{u}(\alpha)\right) = 0$. $M = F + x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$; $H = F + h\,\vec{u}(\alpha) = F + h\cos\alpha\,\vec{\imath} + h\sin\alpha\,\vec{\jmath}$ d'où $\left(\overrightarrow{HM} \,|\, \vec{u}(\alpha)\right) = \left(\overrightarrow{FM} - \overrightarrow{FH} \,|\, \vec{u}(\alpha)\right) = x\cos\alpha + y\sin\alpha - h\,(\vec{u}(\alpha) \,|\, \vec{u}(\alpha))$ soit :

$$\mathcal{D} \,|\, x\cos\alpha + y\sin\alpha - h = 0$$

par conséquent si $M = F + x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ est un point quelconque de $\mathcal{P}$,

$$d(M \,;\, \mathcal{D}) = \frac{|x\cos\alpha + y\sin\alpha - h|}{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}} = |x\cos\alpha + y\sin\alpha - h|\,.$$



En polaires si $M = F + r\,\vec{u}(\theta)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ et

$$\begin{aligned} d(M \,;\, \mathcal{D}) &= |r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha - h| \\ &= |r\cos(\theta - \alpha) - h|\,. \end{aligned}$$

Par suite $M \in \mathcal{C}$ *ssi* $|r| = e\,|r\cos(\theta-\alpha) - h|$ ce qui équivaut à $r^2 = e^2\left(r\cos(\theta-\alpha) - h\right)^2$ ou encore à $(r - e(r\cos(\theta-\alpha) - h))(r + e(r\cos(\theta-\alpha) - h)) = 0$ soit

$$r = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta-\alpha)} \text{ (a) ou } r = \frac{-eh}{1 - e\cos(\theta-\alpha)} \text{ (b)}$$

(et $p = eh$) mais l'ensemble des points M tels que (a) et celui des points M tels que (b) sont les mêmes, puisque le couple (r, θ) vérifie (a) *ssi* le couple $(-r, \theta + \pi)$ vérifie (b) or ce sont deux s.c.p. désignant le même point.

Conclusion Une équation polaire de $\mathcal{C}$ dans $(F \,;\, (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ est

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta-\alpha)} = \frac{eh}{1 + e\cos(\theta-\alpha)}$$

Remarque 2 *En repartant de l'équation cartésienne de la directrice :* $\mathcal{D} \mid x\cos\alpha + y\sin\alpha = h$ *on retrouve facilement facilement une équation polaire de* $\mathcal{D}$ *:* $h = r\cos\theta\cos\alpha + r\sin\theta\sin\alpha = r\cos(\theta-\alpha)$ *d'où*

$$\mathcal{D} \mid r = \frac{h}{\cos(\theta-\alpha)},$$

à comparer avec l'équation polaire obtenue pour $\mathcal{C}$*.*

Remarque 3 $\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' = \frac{1+e\cos\theta}{p} - \frac{e\cos\theta}{p} = \frac{1}{p} \neq 0$ *: donc il n'y a* pas de point d'inflexion *sur les coniques.*

2 Equations cartésiennes des coniques

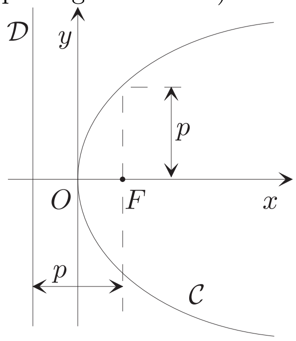
2.1 Paraboles

$\mathcal{C}$ est la parabole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ (et d'excentricité $e = 1$).

Prenons pour origine le milieu O de (F, H) et choisissons $\vec{\imath} = \frac{1}{h}\overrightarrow{HF}$ de sorte que $F = O + \frac{h}{2}\vec{\imath}\,(= O + \frac{p}{2}\vec{\imath}$ puisque $e = 1)$. L'axe Ox est donc le grand axe Δ de $\mathcal{C}$. Dans ce repère, $\mathcal{D} \mid x = -\frac{p}{2}$ donc si $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, $d(M \,;\, \mathcal{D}) = \left|x + \frac{p}{2}\right|$ et $d(M, F) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$. Donc M appartient à la parabole $\mathcal{C}$ ssi $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2$ soit $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$ d'où finalement l'*équation réduite* de $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} : y^2 = 2px$$

Ceci permet de paramétrer $\mathcal{C}$ grâce à $t = \frac{y}{p}$ d'où $x = \frac{pt^2}{2}$; $y = pt$. On en déduit le tracé de la parabole $\mathcal{C}$ qui présente bien sûr une branche parabolique d'axe Ox (qui n'est autre que le grand axe Δ).



2.2 Ellipses

$\mathcal{C}$ est ici l'ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e ($\in \ ]0,1[$). On pose toujours $\vec{\imath} = \frac{1}{h}\overrightarrow{HF}$ et on choisit provisoirement l'origine en F d'où $H = F - h\vec{\imath}$. Donc si $M = F + x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, $d(M\,;\mathcal{D}) = |x+h|$, $d(M,F) = \sqrt{x^2+y^2}$ d'où

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad d(M,F)^2 = e^2 d(M\,;\mathcal{D})^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = e^2 (x+h)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(1-e^2\right) x^2 + y^2 - 2he^2 x = e^2h^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - \frac{2he^2}{1-e^2}\,x + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2h^2}{1-e^2} \end{aligned}$$

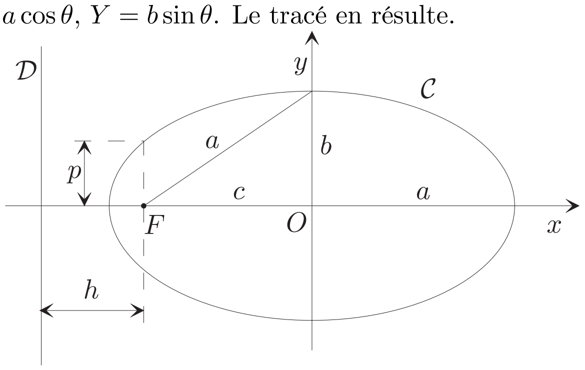
ce qu'on peut encore écrire : $X^2 + \frac{Y^2}{1-e^2} = \frac{e^2h^2}{1-e^2} + \frac{e^4h^2}{(1-e^2)^2} = \frac{e^2h^2}{(1-e^2)^2}$ où $X = x - \frac{he^2}{1-e^2}$ (et $Y = y$) soit finalement

$$\mathcal{C} : \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

(équation réduite de $\mathcal{C}$) avec

- $a = \frac{eh}{1-e^2}$: *demi-grand axe* de $\mathcal{C}$;
- $b = \frac{eh}{\sqrt{1-e^2}} = \sqrt{1-e^2}a$ ($< a$) : *demi-petit axe* de $\mathcal{C}$;
- $F = O - c\vec{\imath}$ où $c = \frac{he^2}{1-e^2} = ea = \sqrt{a^2-b^2}$: *distance focale* de $\mathcal{C}$.

On en déduit que l'ellipse $\mathcal{C}$ peut être paramétrée par $X = a\cos\theta$, $Y = b\sin\theta$. Le tracé en résulte.



L'équation obtenue montre que l'origine O du nouveau repère est *centre de symétrie* de $\mathcal{C}$. Donc si $F' = s_O(F)$ et $\mathcal{D}' = s_O(\mathcal{D})$, $\mathcal{C}$ est aussi l'ellipse de foyer F' et de directrice $\mathcal{D}'$ (et d'excentricité e).

Remarque 4 *Ceci montre également que $\mathcal{C}$ peut s'interpréter, dans l'espace, comme la projection d'un cercle d'un plan Π sur un plan $\Pi' \nparallel \Pi$.*

2.3 Hyperboles

$\mathcal{C}$ est maintenant l'hyperbole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e.

Le début des calculs précédents reste valable. On peut repartir de

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(e^2-1\right) x^2 - y^2 + 2he^2 x = -e^2h^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 + \frac{2he^2}{e^2-1}\,x - \frac{y^2}{e^2-1} = -\frac{e^2h^2}{e^2-1}\ ; \end{aligned}$$

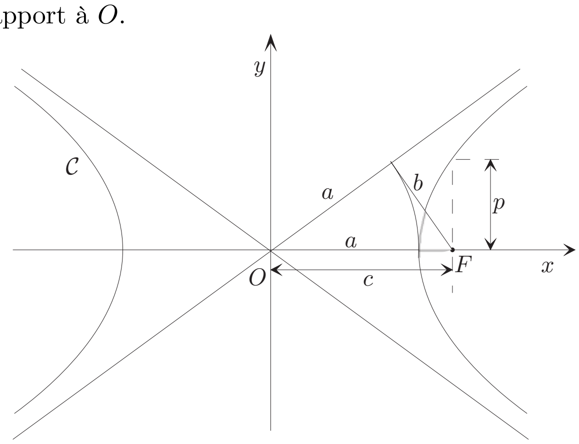
la différence tient au signe de e^2-1 qui est maintenant > 0. On écrit donc avec $X = x + \frac{he^2}{e^2-1}$ et $Y = y$: $X^2 - \frac{Y^2}{e^2-1} = -\frac{e^2h^2}{e^2-1} + \frac{e^4h^2}{(e^2-1)^2} = \frac{e^2h^2}{(e^2-1)^2}$ soit enfin

$$\mathcal{C} : \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

(équation réduite de $\mathcal{C}$) où

- $a = \frac{eh}{e^2-1}$: *demi-axe focal* de $\mathcal{C}$;
- $b = \frac{eh}{\sqrt{e^2-1}} = \sqrt{e^2-1}a$: *demi-axe non focal* de $\mathcal{C}$ (on peut maintenant avoir $b \leq a$ ou $b \geq a$) ;
- $F = O + c\vec{\imath}$ où $c = \frac{e^2h}{e^2-1} = ea = \sqrt{a^2+b^2}$: *distance focale* de $\mathcal{C}$.

On en déduit un paramétrage possible de $\mathcal{C}$ sous la forme $X = a\,\mathrm{ch}\,t$, $Y = b\,\mathrm{sh}\,t$. L'étude fait apparaître pour $\mathcal{C}$ deux asymptotes passant par l'origine et de pentes $\pm\frac{b}{a}$. $\mathcal{C}$ admet O comme centre de symétrie d'où un autre couple $(F',\mathcal{D}')$ foyer-directrice déduit de $(F,\mathcal{D})$ par symétrie par rapport à O.



Si $a = b$, $\mathcal{C}$ est dite hyperbole *équilatère*. C'est le cas où les deux asymptotes sont perpendiculaires (et $e = \sqrt{2}$).

3 Définition bifocale des coniques à centre

Seules les ellipses et les hyperboles présentent un centre de symétrie, ainsi que deux foyers distincts. On peut caractériser une ellipse (*resp.* une hyperbole) à l'aide de ceux-ci :

Théorème 1 *Si F, F' sont deux points distincts de $\mathcal{P}$ et si $a \in \mathbb{R}$, $a > c = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{FF'}\right\|$, l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que*

$$d(M,F) + d(M,F') = 2a$$

est une ellipse dont les foyers sont F et F' et le demi-grand axe a.

Théorème 2 *Si F, F' sont deux points distincts de $\mathcal{P}$ et si $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < c = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{FF'}\right\|$, l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que*

$$|d(M,F) - d(M,F')| = 2a$$

est une hyperbole dont les foyers sont F et F' et le demi-axe focal a.

4 Courbes algébriques de degré 2

Une *courbe algébrique de degré 2* du plan $\mathcal{P}$ est une courbe d'équation cartésienne $P(x,y) = 0$ (où $P \in \mathbb{R}[X,Y]$, $\deg(P) = 2$) dans *tout* repère de $\mathcal{P}$ (il suffit d'*un*[1]).

Par exemple : les cercles et les coniques.

Soit $\mathcal{C}$ une courbe algébrique de degré 2 de $\mathcal{P}$. $\mathcal{C}$ a un équation de la forme $f(M) = 0$; dans un repère $\mathcal{R} = (O\,;(\vec{\imath},\vec{\jmath}))$ ON, $f(M) = P(x,y)$ où $P \in \mathbb{R}[X,Y]$, $\deg(P) = 2$ donc :

$$f(M) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \qquad (1)$$

On fait disparaître les termes "rectangles" (en xy) grâce à une *rotation* du repère. Soit le nouveau repère (ON) $\mathcal{R}' = (O\,;(\vec{u},\vec{v}))$ avec $\vec{u} = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath}$. Les nouvelles coordonnées sont X et Y telles que

$$\begin{cases} x = \cos\theta\ X - \sin\theta\ Y \\ y = \sin\theta\ X + \cos\theta\ Y \end{cases}.$$

Dans le nouveau repère l'équation devient $f(M) = 0 = \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\nu XY + 2\alpha X + 2\beta Y + F$ où

$$\begin{array}{rcl} \lambda & = & A\cos^2\theta + C\sin^2\theta - 2B\cos\theta\sin\theta \\ & = & \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2}\cos 2\theta - B\sin 2\theta \\ \mu & = & A\sin^2\theta + C\cos^2\theta + 2B\cos\theta\sin\theta \\ & = & \frac{A+C}{2} - \frac{A-C}{2}\cos 2\theta + B\sin 2\theta \\ \nu & = & (A-C)\cos\theta\sin\theta + B\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\ & = & \frac{A-C}{2}\sin 2\theta + B\cos 2\theta \end{array} \qquad (2)$$

On annule simplement ν en posant $\theta = \frac{\pi}{4}$ si $A = C$, et sinon $\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2B}{A-C}\right)$. Pour ce choix de θ, l'équation de $\mathcal{C}$ est devenue $f(M) = 0$ avec

$$f(M) = \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\alpha X + 2\beta Y + F.$$

$(M = O + X\vec{u} + Y\vec{v})$ $(F = f(O)$ est inchangé).

[1]En effet les changements de repères se traduisent par des relations du type

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' + \lambda \\ y = \gamma x' + \delta y' + \mu \end{cases}$$

ce qui reporté dans $P(x,y)$ donne une autre expression polynomiale $Q(x',y')$. Dans cette dernière, il y a nécessairement aussi des termes de degré 2, car sinon en faisant le changement de repère en sens inverse on conclurait à une absence de termes de degré 2 dans P.

Cas 1 $\lambda\mu = 0$

p. ex. $\lambda = 0$ (et alors $\mu \neq 0$ car sinon P serait de degré ≤ 1).

$$f(M) = \mu Y^2 + 2\alpha X + 2\beta Y + F = \mu\left(Y + \frac{\beta}{\mu}\right)^2 + 2\alpha X + \gamma$$

- Si $\alpha = 0$, $f(M) = \mu\left[\left(Y + \frac{\beta}{\mu}\right)^2 + \frac{\gamma}{\mu}\right]$
  - Si $\frac{\gamma}{\mu} > 0$, $\mathcal{C} = \varnothing$.
  - Si $\frac{\gamma}{\mu} \leq 0$, $f(M) = \left[Y + \frac{\beta}{\mu} - \sqrt{-\frac{\gamma}{\mu}}\right]\left[Y + \frac{\beta}{\mu} + \sqrt{-\frac{\gamma}{\mu}}\right]$ et $\mathcal{C} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ où $\mathcal{D}_1 \,|\, Y = -\frac{\beta}{\mu} + \sqrt{-\frac{\gamma}{\mu}}$ et $\mathcal{D}_2 \,|\, Y = -\frac{\beta}{\mu} - \sqrt{-\frac{\gamma}{\mu}}$.
- Si $\alpha \neq 0$, $f(M) = \mu\left(Y + \frac{\beta}{\mu}\right)^2 + 2\alpha\left(X + \frac{\gamma}{2\alpha}\right)$. Si $\Omega = O + \left(-\frac{\gamma}{2\alpha}\right)\vec{u} + \left(-\frac{\beta}{\mu}\right)\vec{v}$, l'expression de $f(M)$ dans $\mathcal{R}_1 = (\Omega\,;(\vec{u},\vec{v}))$ est $f(M) = \mu\left(y^2 + \frac{2\alpha}{\mu}x\right)$ donc $\mathcal{C}$ est une parabole

Conclusion Si $\lambda\mu = 0$, $\mathcal{C}$ est $\varnothing$, une parabole ou la réunion de deux droites parallèles (ou confondues)

Cas 2 $\lambda\mu \neq 0$

$f(M) = \lambda\left(X^2 + \frac{2\alpha}{\lambda}X\right) + \mu\left(Y^2 + \frac{2\beta}{\mu}Y\right) + F = \lambda\left(X + \frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 + \mu\left(Y + \frac{\beta}{\mu}\right)^2 + \gamma$. Posons $\Omega = O + \left(-\frac{\alpha}{\lambda}\right)\vec{u} + \left(-\frac{\beta}{\mu}\right)\vec{v}$: dans $\mathcal{R}_1 = (\Omega\,;(\vec{u},\vec{v}))$ l'expression de $f(M)$ devient $f(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \gamma$.

- Si $\lambda = \mu$ et $\gamma\lambda > 0$, $\mathcal{C} = \varnothing$.
- Si $\lambda = \mu$ et $\gamma\lambda < 0$, $\mathcal{C}$ est un cercle de centre Ω.
- Si $\lambda = \mu$ et $\gamma\lambda = 0$, $\mathcal{C} = \{\Omega\}$.
- Si $\gamma = 0$, $f(M) = \lambda x^2 + \mu y^2 = \lambda\left(x^2 + \frac{\mu}{\lambda}y^2\right)$
  - Si $\lambda\mu > 0$, $\mathcal{C} = \{\Omega\}$.
  - Si $\lambda\mu < 0$, $f(M) = \lambda\left(x - \sqrt{-\frac{\mu}{\lambda}}y\right)\left(x + \sqrt{-\frac{\mu}{\lambda}}y\right)$ et $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites sécantes en Ω.
- Si $\gamma \neq 0$, $f(M) = (\pm|\gamma|)\left(\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm 1\right)$ selon les signes de λ, μ, γ. On a les cas suivants :
  - $f(M) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1$: $\mathcal{C} = \varnothing$.
  - $f(M) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$: $\mathcal{C}$ est une ellipse.
  - $f(M) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$: $\mathcal{C}$ est une hyperbole.
  - $f(M) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1$: idem.

Conclusion Une courbe algébrique de degré 2 de $\mathcal{P}$ est une conique, un cercle, la réunion de deux droites éventuellement confondues, un singleton ou $\varnothing$.

4.1 Utilisation du discriminant

Définition 2 *Pour un polynôme en x et y tel que défini par la relation* (1), *le* discriminant *est la quantité $AC-B^2$.*

Réutilisons alors les formules (2). On calcule

$$\begin{aligned}\lambda\mu-\nu^2 &= \left(\tfrac{A+C}{2}\right)^2-\left(\tfrac{A-C}{2}\cos 2\theta-B\sin 2\theta\right)^2 \\ &\quad -\left(\tfrac{A-C}{2}\sin 2\theta+B\cos 2\theta\right)^2 \\ &= \left(\tfrac{A+C}{2}\right)^2-\left(\tfrac{A-C}{2}\right)^2-B^2 \\ &= AC-B^2\end{aligned}$$

autrement dit :

Proposition 1 *Le discriminant de l'équation polynomiale. de degré 2 "$f(M)=0$" est indépendant du repère orthonormal dans laquelle elle est exprimée.*

En effet, outre la rotation déjà calculée, une translation est sans effet sur les termes de degré 2 du polynôme, donc sur son discriminant.

Pour obtenir l'équation réduite, on a multiplié l'équation par une constante k. Ceci multiplie son discriminant par k^2 mais laisse inchangé son *signe*. En reprenant les différents cas de l'étude précédente, on obtient :

- si $AC-B^2>0$, $\mathcal{C}$ est une ellipse, un cercle, un singleton ou $\varnothing$;
- si $AC-B^2<0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes ;
- si $AC-B^2=0$, $\mathcal{C}$ est une parabole, la réunion de deux droites parallèles ou $\varnothing$.

5 Équation de la tangente à une courbe algébrique

On considère une courbe algébrique $\mathcal{C}$ du plan $\mathcal{P}$ définie par l'équation

$$f(M)=0=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$$

Supposons que $t\mapsto M(t)=O+x(t)\vec{\imath}+y(t)\vec{\jmath}$ soit un paramétrage régulier[2] de $\mathcal{C}$. On dérive la relation $f(M(t))=0$ par rapport à t pour obtenir $x'(t)(Ax(t)+By(t)+D)+y'(t)(Bx(t)+Cy(t)+E)=0$. Cela signifie qu'en $M_0=M(t_0)$ le vecteur tangent $\vec{F}'(t_0)=x'(t_0)\vec{\imath}+y'(t_0)\vec{\jmath}$ est orthogonal à $\vec{n}_0=(Ax(t_0)+By(t_0)+D)\vec{\imath}+(Bx(t_0)+Cy(t_0)+E)\vec{\jmath}$. Par conséquent, l'équation de la tangente[3] à $\mathcal{C}$ en M_0 est

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{M_0}\,|\,0 &= \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n} \\ &= (x-x_0)(Ax(t_0)+By(t_0)+D) \\ &\quad +(y-y_0)(Bx(t_0)+Cy(t_0)+E)\end{aligned}$$

ce qui s'écrit encore (en notant $x_0=x(t_0)$ et $y_0=y(t_0)$) : $Axx_0+B(xy_0+x_0y)+Cyy_0+Dx+Ey=k$ où $k=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+Dx_0+Ey_0=-F-Dx_0-Ey_0$ puisque $M_0\in\mathcal{C}$. Finalement

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{M_0}\,|\,0 &= Axx_0+B(xy_0+x_0y)+Cyy_0 \\ &\quad +D(x+x_0)+E(y+y_0)+F\end{aligned}$$

ce qui conduit à formuler la

Remarque 5 *"dédoublement des termes"*
Dans tous les cas non triviaux de courbe algébrique de degré 2 *on constate qu'on passe de l'équation* ($f(M)=0$) *à celle de sa tangente en $M_0(x_0,y_0)$ par le procédé du dédoublement des termes qui consiste à remplacer*

- *chaque terme x^2* (resp. y^2) *par x_0x* (resp. y_0y)
- *chaque terme $2x$* (resp. $2y$) *par x_0+x* (resp. y_0+y)
- *chaque terme $2xy$ par x_0y+y_0x.*

Exemples $\mathcal{R}$ est un repère orthonormal de $\mathcal{P}$.

1. $\mathcal{C}:x^2+y^2-2ax-2by+c=0$: cercle de centre $A=O+a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$
   $f(M)=x^2+y^2-2ax-2by+c$. $\vec{n}_0=(x_0-a)\vec{\imath}+(y_0-b)\vec{\jmath}$ donc $\mathcal{T}_{M_0}\,|\,(x_0-a)x+(y_0-b)y-ax_0-by_0+c=0$ ce qu'on peut encore écrire
   $$\mathcal{T}_{M_0}\,|\,x_0x+y_0y-a(x+x_0)-b(y+y_0)+c=0.$$
2. $\mathcal{C}:y^2=2px$ (parabole)
   $f(M)=y^2-2px$. $\vec{n}_0=-p\vec{\imath}+y_0\vec{\jmath}$ donc $\mathcal{T}_{M_0}\,|\,(x-x_0)(-p)+(y-y_0)y_0=0$ soit $\mathcal{T}_{M_0}\,|\,yy_0-px-\underbrace{(y_0^2-px_0)}_{=px_0}=0$ donc
   $$\mathcal{T}_{M_0}\,|\,y_0y-p(x+x_0)=0.$$
3. $\mathcal{C}:\frac{x^2}{a^2}+\varepsilon\frac{y^2}{b^2}=1$ où $\varepsilon=1$ (ellipse) ou -1 (hyperbole)
   $f(M)=\frac{x^2}{a^2}+\varepsilon\frac{y^2}{b^2}-1$. $\vec{n}_0=\frac{x_0}{a^2}\vec{\imath}+\frac{\varepsilon y_0}{b^2}\vec{\jmath}$ donc $\mathcal{T}_{M_0}\,|\,(x-x_0)\frac{x_0}{a^2}+(y-y_0)\frac{\varepsilon y_0}{b^2}=0$ ou encore
   $$\mathcal{T}_{M_0}\,|\,\frac{x_0x}{a^2}+\varepsilon\frac{y_0y}{b^2}-1=0.$$

[2] On a prouvé l'existence d'un tel paramétrage dans le cas des coniques ; son existence est claire dans les autres cas particuliers rencontrés lors de l'étude précédente.

[3] Ceci ne semble pas valable si $\vec{n}=\vec{0}$. Mais peut-il en être ainsi ? Cela voudrait dire que

$$\begin{aligned}P(x_0+u,y_0+v) &= P(x_0,y_0)+(2Ax_0+2By_0+2D)u \\ &\quad +(2Bx_0+2Cy_0+2E)v+Au^2+2Buv+Cv^2 \\ &= P(x_0,y_0)+Au^2+2Buv+Cv^2 \\ &= P(x_0-u,y_0-v)\end{aligned}$$

autrement dit, M_0 serait *centre de symétrie* de $\mathcal{C}$. Mais un tel centre de symétrie n'existe pas (pour les paraboles) ou n'est pas situé sur $\mathcal{C}$ (pour les ellipses et les hyperboles).