PCSI - mathématiques

Nombres complexes

Certaines équations polynomiales n'ont pas de solution dans $\mathbb{R}$, par exemple "$x^2 + 1 = 0$". On met en place les nombres complexes pour remédier à cette lacune des réels.

1 Le corps $\mathbb{C}$ des complexes

1.1 Construction de $\mathbb{C}$

On pose $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ (ensemble des couples de réels) que l'on munit des opérations suivantes :

- une addition $+$ définie par
$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \ ;$$
- une multiplication $\times$ définie par
$$(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx') \, .$$

On vérifie que $+$ est commutative, associative, admet pour élément neutre $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$ et que tout élément (x, y) de $\mathbb{C}$ admet un symétrique (ou opposé) pour $+$ et : $-(x, y) = (-x, -y)$. La multiplication quant à elle est commutative, associative, distributive par rapport à $+$ et admet pour élément neutre $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$. La question de l'inverse (symétrique pour $\times$) sera étudiée plus loin. D'ores et déjà ces propriétés confèrent à $\mathbb{C}$ une structure que l'on appellera en algèbre d'*anneau commutatif*.

1.2 Notation usuelle

Un couple de réels n'est pas un réel... Cependant on aimerait identifier $\mathbb{R}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{C}$. Pour cela définissons l'application
$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \ ; \ x \mapsto (x, 0) \, .$$
On vérifie immédiatement que : $\varphi(x + x') = \varphi(x) + \varphi(x')$, $\varphi(xx') = \varphi(x) \times \varphi(x')$, $\varphi(1) = 1_{\mathbb{C}}$ pour tous x, $x' \in \mathbb{R}$. En outre, l'application φ est injective ($\varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow x = x'$). On dit que φ est un plongement. Compte tenu de φ on identifie $\mathbb{R}$ à son image par φ dans $\mathbb{C}$ en convenant que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$x = \varphi(x) = (x, 0) \, .$$
On pose d'autre part
$$\mathrm{i} = (0, 1) \, .$$
On vérifie que $\mathrm{i}^2 = (0, 1) \times (0, 1) = (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1$ et plus généralement si $y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{i} \times y = (0, 1) \times (y, 0) = (0.y - 1.0, 0.0 + 1.y) = (0, y)$. Ainsi pour tout $z = (x, y) \in \mathbb{C}$:
$$z = (x, 0) + (0, y) = x + \mathrm{i} \times y.$$

Cette écriture est bien sûr unique (puisque z n'est autre que le couple (x, y)). On obtient ainsi la notation usuelle des complexes. À partir de là, on peut retrouver avec la condition $\mathrm{i}^2 = -1$ la définition du produit des complexes. Le résultat est qu'on a inclus $\mathbb{R}$ dans une structure plus vaste où -1 est le carré d'un élément particulier (à savoir, le complexe i).

Définition 1 *Si $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ (avec x, $y \in \mathbb{R}$), x (*resp. *y) est la partie réelle (*resp. *imaginaire) de z notée* $\mathrm{Re}(z)$ *ou $\Re z$ (*resp. $\mathrm{Im}(z)$ *ou $\Im z$).*

Attention ! Si la partie réelle (*resp.* imaginaire) d'une somme est bien la somme des parties réelles (*resp.* imaginaires), ce n'est pas le cas pour le produit.

1.3 Conjugaison, module

Définition 2 *Si $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ on pose $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$: conjugué de z.*

On vérifie facilement les propriétés suivantes de l'application "conjugaison" $z \mapsto \bar{z}$:

Proposition 1 *pour tous z, $z' \in \mathbb{C}$,*

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$;
- $\overline{zz'} = \bar{z}.\bar{z}'$;
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.

Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. On calcule $z\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - \mathrm{i}^2 y^2 = x^2 + y^2$: on constate que $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$.

Définition 3 *On pose $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ ([1]) : module du complexe z.*

Notons que $|z|$ représente la distance euclidienne de l'origine au point (x, y) du plan (voir § 5). Il est justifié de noter le module comme la valeur absolue dans $\mathbb{R}$. En effet si x est un réel, son module (dans $\mathbb{C}$) est $\sqrt{x^2} = |x|$ (valeur absolue de x). Ainsi, le module est la généralisation "naturelle" de la valeur absolue.

On déduit facilement de la proposition 1 les propriétés suivantes du module :

Proposition 2 *pour tous z, $z' \in \mathbb{C}$,*

- $|z| \in \mathbb{R}_+$ *et* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
- $|zz'| = |z| \, |z'|$;

[1] **Attention !** L'utilisation de la $\sqrt{\ }$ est possible seulement parce que la quantitée qu'elle contient est un *réel* ≥ 0. Son utilisation avec les complexes est *incorrecte* et peut conduire à des erreurs grossières.

- $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ *(inégalité triangulaire).*

Supposons $z \neq 0$ dans $\mathbb{C}$. Alors $|z| \in \mathbb{R}_+^*$ donc le *réel* $|z|$ est inversible dans $\mathbb{R}$ et on peut écrire $z \times \frac{1}{|z|^2}\bar{z} = 1$ dans $\mathbb{C}$. Par conséquent : tout complexe non nul z est inversible et : $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$. Combiné aux propriétés précédentes, ceci fait de $\mathbb{C}$ un *corps commutatif.*

On peut alors ajouter aux propriétés 1. et 2. les relations $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$ valables pour tous z, $z' \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.

2 Forme trigonométrique

2.1 Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition 4 *On pose* $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ *("cercle unité" de* $\mathbb{C}$*).*

On a bien sûr $1 \in \mathbb{U}$. En outre, d'après la propriété 2,

- si z, $z' \in \mathbb{U}$, $|zz'| = |z|\,|z'| = 1.1 = 1$ donc $zz' \in \mathbb{U}$;
- si $z \in \mathbb{U}$, $|z| = 1$ donc $z \neq 0$, z est inversible et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$ donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Ces propriétés confèrent à $\mathbb{U}$ une structure que nous appellerons *groupe* en algèbre. Introduisons une notation due à Euler, qui permet de décrire les éléments de $\mathbb{U}$.

2.2 Notation d'Euler

Notation 1 *On pose pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *:*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta.$$

La notation exponentielle n'est pas anodine. Elle est justifiée par le calcul suivant, valable pour tous θ, $\theta' \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)\left(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta'\right) \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \\ &\quad + \mathrm{i}\left(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\right) \\ &= \cos\left(\theta+\theta'\right) + \mathrm{i}\sin\left(\theta+\theta'\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\theta'\right)} \end{aligned} \qquad (1)$$

si l'on admet les formules d'addition pour les fonctions sin et cos. Plus formellement, considérons l'application

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \;;\; \theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \;:$$

alors φ vérifie : $\varphi\left(\theta+\theta'\right) = \varphi(\theta) \times \varphi\left(\theta'\right)$ [2]. En outre, φ arrive en fait dans $\mathbb{U}$ puisque pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right|^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

En fait, *tous* les éléments de $\mathbb{U}$ sont de cette forme. Plus précisément :

Théorème 1 *Soit* $z \in \mathbb{U}$. *Il existe un unique* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tel que :* $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Ainsi, l'application φ est *surjective* de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U}$.

[2] On dira en algèbre que φ est un *morphisme de groupes.*

Formule de De Moivre[3]

Repartant de (1) on a en faisant $\theta = \theta'$: $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$. Grâce à une récurrence immédiate on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Proposition 3 (De Moivre) *pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)^n &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta. \end{aligned}$$

Cette formule est le point de départ du calcul des expressions de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ comme polynômes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, qui seront détaillées lors de l'étude des fonctions circulaires.

Remarque 1 *Si* $z \in \mathbb{U}$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}$.

2.3 Arguments d'un complexe *non nul*

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $\rho = |z|$: alors $\frac{1}{\rho}z \in \mathbb{U}$ donc est de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$ (unique modulo 2π). On peut donc écrire

$$z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \text{ où} \qquad (2)$$

- ρ est le module de z ;
- θ est **un** *argument* de z noté $\arg z$. (Ce n'est pas une définition intrinsèque ; θ n'est défini que modulo 2π.)

(2) est la *forme trigonométrique* du complexe z. Elle est particulièrement adaptée aux calculs multiplicatifs puisque si $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $z' = \rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \in \mathbb{C}^*$, $zz' = \rho\rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta+\theta'\right)}$, $\frac{z'}{z} = \frac{\rho'}{\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta'-\theta\right)}$ et $z^n = \rho^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On peut ainsi énoncer les propriétés des arguments :

- $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$ $[2\pi]$;
- $\arg\left(z^{-1}\right) = -\arg z$ $[2\pi]$;
- $\arg(z^n) = n\arg z$ $[2\pi]$.

(Toutes ces égalités ont lieu *modulo* 2π.)

3 Équations dans $\mathbb{C}$

3.1 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. $\mathbb{U}_n$ est l'ensemble des *racines* $n^{ièmes}$ *de l'unité* dans $\mathbb{C}$. On remarque à propos de $\mathbb{U}_n$ les points suivants :

- si $z \in \mathbb{U}_n$, $|z|^n = |z^n| = 1$ et comme $|z| \in \mathbb{R}_+$, $|z| = 1$ de sorte que $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$,
- $1 \in \mathbb{U}_n$,
- si z, $z' \in \mathbb{U}_n$, $(zz')^n = z^n z'^n = 1$ donc $zz' \in \mathbb{U}_n$,
- enfin si $z \in \mathbb{U}_n$, $z \neq 0$ (puisque $|z| = 1$) et $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1$ donc $\frac{1}{z} \in \mathbb{U}_n$.

[3] Abraham De Moivre (1667-1754), mathématicien anglais d'origine française.

Ainsi $\mathbb{U}_n$, muni de la multiplication, est un groupe au même titre que $\mathbb{U}$. Quels sont ses éléments ? Posons $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$: alors $\omega^n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} = 1$ donc $\omega \in \mathbb{U}_n$. Par suite, $\omega^k \in \mathbb{U}_n$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U}_n$. Alors $|z| = 1$ donc z est de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ d'où $z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta = 1$ donc $\cos n\theta = 1$ (et $\sin n\theta = 0$) ce qui montre que $n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$: $n\theta = 2k\pi$ pour un $k \in \mathbb{Z}$. Alors $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ et $z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} = \omega^k$.

Mais on peut être plus précis : quelles valeurs doit-on donner à k pour obtenir une fois et une seule chaque élément de $\mathbb{U}_n$? La division euclidienne de k par n s'écrit $k = nq + r$ d'où $z = \omega^k = (\omega^n)^q \omega^r = \omega^r$ avec $0 \le r < n$. Maintenant, si $0 \le r' < n$ et $z = \omega^r = \omega^{r'}$, alors $\omega^{r'-r} = 1 = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}(r'-r)\pi}{n}}$ donc $r' - r \in n\mathbb{Z}$ mais comme $-n < r' - r < n$, la seule possibilité est $r' = r$.

En conclusion :

Théorème 2 *Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$*

$$\mathbb{U}_n = \left\{1,\ \omega,\ ...,\ \omega^{n-1}\right\} = \{\omega^r \mid 0 \le r \le n-1\}$$

admet exactement n élements.

Cas particuliers

- $n = 1$: $\mathbb{U}_1 = \{1\}$.
- $n = 2$: $\omega = -1$ et $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$.
- $n = 3$: on note $\mathrm{j} = \omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Alors $\mathrm{j}^3 = 1$ et $\mathrm{j}^2 = \mathrm{j}^{-1} = \bar{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$, et $\mathbb{U}_3 = \left\{1, \mathrm{j}, \mathrm{j}^2\right\}$.
- $n = 4$: $\omega = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} = \mathrm{i}$ et $\mathbb{U}_4 = \{1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}\}$.

Remarque 2 *Si $n \ge 2$, comme $\omega^n = 1$:*

$$\textstyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0 \ :$$

la somme des racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1 dans $\mathbb{C}$ est nulle.

En particulier ($n = 3$), $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

3.2 Résolution de l'équation $z^n = a$

Soit a un complexe *non nul*. On cherche les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a dans $\mathbb{C}$.

- Posons $a = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$: alors si $z_0 = \sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{n}}$, $z_0^n = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = a$ donc a admet (au moins) une racine $n^{\text{ième}}$.
- Alors, si $z \in \mathbb{C}$, $z^n = a = z_0^n \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$. Donc z est de la forme $z_0\omega^k$ où k prend n valeurs distinctes 0, 1, ..., $n-1$. Comme $z_0 \neq 0$, z prend également n valeurs distinctes. En conclusion :

Proposition 4 *a admet exactement n racines $n^{\text{ièmes}}$ dans $\mathbb{C}$, et si z_0 est l'une d'elles, toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de a sont les $z_0\omega^k$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.*

La situation est donc bien différente du cas réel. Rappelons la mise en garde de la page 1, note 1 :

La définition d'une "fonction racine carrée" dans $\mathbb{C}$ pose des problèmes théoriques qui dépassent le cadre du programme de cette classe. L'utilisation de la notation $\sqrt{\ }$, pour cette raison, est *à proscrire absolument chez les complexes.*

3.3 Équations du second degré

Lorsqu'on cherche à résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{3}$$

(a, b, $c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$) on effectue la transformation canonique suivante :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \tfrac{b}{a}z + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(z + \tfrac{b}{2a}\right)^2 - \tfrac{\Delta}{4a^2}\right) \end{aligned}$$

donc la factorisation est possible à condition de savoir exprimer les racines carrées complexes $\pm\delta$ de Δ (voir T.D.) et conduit à

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \tfrac{b}{2a} - \tfrac{\delta}{2a}\right)\left(z + \tfrac{b}{2a} + \tfrac{\delta}{2a}\right)$$

d'où les deux solutions $z_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\delta}{2a}$ et $z_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\delta}{2a}$ de l'équation (3). On remarque que

- la somme et le produit de z_1 et z_2 valent respectivement $s = -\frac{b}{a}$ et $p = \frac{c}{a}$;
- si a, b, $c \in \mathbb{R}$, z_1 et z_2 sont conjugués (éventuellement réels).

4 Exponentielle complexe

Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$.

Définition 5 *L'exponentielle du complexe z est*

$$\exp z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\left(\cos y + \mathrm{i}\sin y\right).$$

Ceci généralise la définition de l'exponentielle réelle, puisque si $z = x \in \mathbb{R}$, $\exp z = \mathrm{e}^x$. En combinant la relation (1) avec les propriétés de l'exponentielle réelle, on obtient :

Théorème 3 *Pour tous z, $z' \in \mathbb{C}$:*

$$\exp\left(z + z'\right) = \exp z \exp z'.$$

Comme d'autre part $\exp 0 = 1$, on en déduit :

Corollaire 1 *Si $z \in \mathbb{C}$, $\exp z \in \mathbb{C}^*$ et $\left(\exp z\right)^{-1} = \exp\left(-z\right)$.*

L'exponentielle complexe est donc un morphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$. On remarque enfin que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp n = \left(\exp 1\right)^n = \mathrm{e}^n$ ce qui justifie la

Notation 2 $\mathrm{e}^z = \exp z$ *pour tout* $z \in \mathbb{C}$.

Remarque 3 *On déduit de la définition de l'exponentielle complexe les propriétés suivantes, valables pour tout $z \in \mathbb{C}$:*

- $\mathrm{e}^{\bar{z}} = \overline{\mathrm{e}^z}$;
- $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.

Résolution de $\mathrm{e}^z = a$

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Écrivons $a = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\rho = |a| > 0$ puisque $a \neq 0$. Alors $a = \mathrm{e}^{\ln\rho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{z_0}$ en posant $z_0 = \ln\rho + \mathrm{i}\theta$. Ainsi l'équation "$\mathrm{e}^z = a$" admet toujours (au moins) une solution.

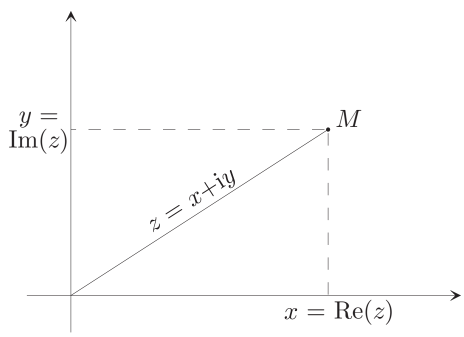
Si d'autre part $\mathrm{e}^z = a = \mathrm{e}^{z_0}$, alors $\mathrm{e}^{z-z_0} = 1$ donc $|\mathrm{e}^{z-z_0}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z-z_0)} = 1$, $\mathrm{Re}\,(z - z_0) = 0$ donc $z - z_0 = \mathrm{i}\theta$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1$, ce qui se traduit par $\mathrm{i}\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ et finalement $\theta \in 2\mathrm{i}\pi\mathbb{Z}$. En somme, $z = z_0 + 2\mathrm{i}k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Tout nombre complexe non nul a donc une infinité de "logarithmes". La définition d'une "fonction logarithme complexe" pose les mêmes problèmes que la racine carrée.

5 Nombres complexes et géométrie

Ensemblistement il n'y a pas de différence entre le complexe $z = x + \mathrm{i}y$ et le point $M = O + x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ du plan réel : il s'agit dans les deux cas du couple (x, y). Selon que l'on souhaite mettre l'accent sur l'aspect algébrique ou géométrique, on emploie le vocabulaire suivant :

- z est l'*affixe*[4] du point M ;
- M est l'*image* (ponctuelle) du complexe z.



5.1 Cercles et disques

Si $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on note :

- $\mathcal{C}\,(a\ ;\ r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$;
- $\mathcal{D}\,(a\ ;\ r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$;
- $\mathcal{D}'\,(a\ ;\ r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$:

$\mathcal{C}\,(a\ ;\ r)$ (*resp.* $\mathcal{D}\,(a\ ;\ r)$, $\mathcal{D}'\,(a\ ;\ r)$) est le cercle (*resp.* disque ouvert, disque fermé) de centre a et de rayon r.

5.2 Positions relatives de trois points

Supposons que a, b et z soient trois complexes distincts et notons $Z = \frac{z-b}{z-a}$. On déduit des propriétés des modules et arguments que :

- $|Z| = \frac{|z-b|}{|z-a|}$;
- $\arg Z = \arg\,(z - b) - \arg\,(z - a)\ \ [2\pi]$.

[4] Dans ce sens, *affixe* est féminin.

Il en résulte que la connaissance de Z est nécessaire et suffisante pour caractériser les positions relatives des images A, B et M de a, b et z dans le plan complexe. Par exemple :

- A, B, M alignés $\Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}$;
- (A, B, M) triangle équilatéral $\Leftrightarrow Z = \mathrm{e}^{\pm\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}$ $(= -\mathrm{j}$ ou $-\mathrm{j}^2)$;
- (A, B, M) triangle isocèle rectangle en $M \Leftrightarrow Z = \pm\mathrm{i}$,

etc.

5.3 Transformations du plan complexe

Une application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto f\,(z)$ peut être considérée comme transformant un point M du plan, image ponctuelles du complexe z, en un point M' image de $f\,(z)$. Considérons quelques exemples du point de vue géométrique.

5.3.1 Application $z \mapsto \bar{z}$

C'est une application involutive[5] caractérisée par les relations $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg\bar{z} = -\arg z\ \ [2\pi]$ soit géométriquement $OM' = OM$ et $\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'}}\right) = -\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}\right)$. Il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Ox.

5.3.2 Application $z \mapsto az$

Si $a = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, f est la composée de l'homothétie de centre O et de rapport ρ et de la rotation de centre O et d'angle θ. Une telle application s'appelle une *similitude (directe*[6]*)* du plan. Si $a = 1$, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. Sinon, l'origine O est le seul point fixe de l'application f.

5.3.3 Application $z \mapsto az + b$

On peut considérer que cette application est composée de la précédente et de la translation du vecteur image de b. Mais on peut aussi se ramener au cas précédent en cherchant un point fixe z_0 (tel que $f\,(z_0) = z_0$).

- si $a = 1$, il n'y a pas de solution. f est une translation.
- sinon, $az + b = z \Leftrightarrow (1 - a)\,z = b \Leftrightarrow z = z_0 = \frac{b}{1-a}$ (unique solution) et alors : $f\,(z) - f\,(z_0) = f\,(z) - z_0 = az + b - (az_0 + b) = a\,(z - z_0)$ donc si M_0 est l'image de z_0, il s'agit encore d'une similitude directe (de centre M_0).

5.3.4 Application $z \mapsto \frac{1}{z}$

f n'est définie que sur $\mathbb{C}^*$ ici. Elle est involutive[5].

Les relations obtenues pour le module et l'argument de $\frac{1}{z}$ se traduisent par $OM' = \frac{1}{OM}$ et $\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'}}\right) = -\left(\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}}\right)$, autrement dit $\frac{1}{OM'}\overrightarrow{OM'}$ est l'image de $\frac{1}{OM}\overrightarrow{OM}$ par la symétrie orthogonale par rapport à Ox.

[5] C'est à dire $f \circ f\,(z) = f\,(f\,(z)) = z$ pour tout $z \in \mathcal{D}\,(f)$. Il en résulte que f est bijective (et $f^{-1} = f$).

[6] Une *similitude indirecte* serait la composée de f avec l'application précédente, càd une application de la forme $z \mapsto a\bar{z} + b$.