PCSI - mathématiques

Compléments de calcul intégral

1 Notions sur les nappes paramétrées

1.1 Définitions

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure affine canonique (euclidienne, orientée).

Définition 1 *Une* nappe paramétrée de classe $\mathcal{C}^k$ *($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) de* $\mathbb{R}^3$ *est une application*

$$F : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & M = F(u,v) \end{array} \right.$$

définie sur un ouvert Ω *de* $\mathbb{R}^2$.

On pourrait, comme dans le cas des arcs paramétrés, définir une notion d'indépendance du paramétrage et parler de *nappe géométrique.* Dans toute la suite on confond cette notion avec celle d'*image* (ou *support*) Γ de l'application F et on admet que les définitions et théorèmes énoncés ne dépendent que des propriétés géométriques intrinsèques de la partie de $\mathbb{R}^3$ étudiée (plutôt que de la façon dont elle est paramétrée).

Exemple 1 *l'application*

$$F : \left| \begin{array}{ccc} [0,2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) & \mapsto & M = F(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} a\cos\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\sin\varphi \\ a\cos\varphi \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un paramétrage d'une calotte hémisphérique de rayon a.

Définition 2 $M = F(u,v)$ *est un point* régulier *de* $\Gamma = \mathrm{Im}(F)$ *si la différentielle de* F *en* (u,v) *:* $\mathrm{d}F(u,v)$ *est une application linéaire* injective *de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

$\mathrm{Im}(\mathrm{d}F(u,v))$ est engendrée par $\mathrm{d}F(u,v) \bullet e_1$ et $\mathrm{d}F(u,v) \bullet e_2$ soit $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u,v)$. Si (et seulement si) $M = F(u,v)$ est régulier, $\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u,v)\right)$ est libre donc engendre un plan de $\mathbb{R}^3$.

Définition 3 *Le* plan tangent *à* Γ *en* $M = F(u,v)$ *est*

$$\mathcal{T}_M = M + \mathrm{Im}(\mathrm{d}F(u,v)).$$

Il est dirigé par $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u,v)$. C'est intuitivement le plan qui "ressemble le plus" à Γ au voisinage de M. En effet, les vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u,v)$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u,v)$ (non nuls) sont les vecteurs tangents à deux courbes tracées sur Γ, obtenues en ne faisant varier que u (*resp.* v).

Définition 4 *"Le"* vecteur normal *à* $\Gamma = \mathrm{Im}(F)$ *en* $M = F(u,v)$ *est*

$$\vec{K} = \vec{K}(u,v) = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v}(u,v). \qquad (1)$$

Lorsque M est régulier, $\vec{K}$ n'est pas nul, et est normal à la nappe Γ (c'est à dire au plan tangent à Γ en M).

1.2 Cas particuliers

1.2.1 Paramétrage cartésien quelconque

$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. M est régulier ssi

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial u} = \begin{pmatrix} x'_u \\ y'_u \\ z'_u \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} = \begin{pmatrix} x'_v \\ y'_v \\ z'_v \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants ; le plan tangent a pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x(u,v) & x'_u & x'_v \\ Y - y(u,v) & y'_u & y'_v \\ Z - z(u,v) & z'_u & z'_v \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

le vecteur normal est

$$\vec{K} = \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,\vec{\imath} + \frac{D(z,x)}{D(u,v)}\,\vec{\jmath} + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,\vec{k}.$$

1.2.2 les paramètres sont x et y, et $z = z(x,y)$

Alors le vecteur normal est

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = \left(\vec{\imath} + z'_x\,\vec{k}\right) \wedge \left(\vec{\jmath} + z'_y\,\vec{k}\right) \\ &= -z'_x\,\vec{\imath} - z'_y\,\vec{\jmath} + \vec{k}. \end{aligned}$$

1.2.2.1 Coordonnées cylindriques

$M = O + r\,\vec{u}(\theta) + z\,\vec{k}$. Dans le cas général r, θ et z sont fonction de deux paramètres abstraits u et v.

1.2.2.2 Les paramètres sont r et θ

$M = r\,\vec{u}(\theta) + z(r,\theta)\,\vec{k}$. $\frac{\partial \vec{M}}{\partial r} = \vec{u} + z'_r\,\vec{k}$; $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = r\,\vec{u}' + z'_\theta\,\vec{k}$. Le vecteur normal est

$$\begin{aligned} \vec{K} &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = \left(\vec{u} + z'_r\,\vec{k}\right) \wedge \left(r\,\vec{u}' + z'_\theta\,\vec{k}\right) \\ &= -r\,z'_r\,\vec{u} - z'_\theta\,\vec{u}' + r\,\vec{k}. \end{aligned}$$

1.2.2.3 Surface de révolution

$z = z(r)$ est indépendant de θ. On peut mettre r en facteur dans l'expression du vecteur normal :

$$\frac{1}{r}\,\vec{K} = -z'(r)\,\vec{u} + \vec{k}.$$

1.2.2.4 Conoïde droit d'axe Oz

$z = z(\theta)$ est indépendant de r. Alors

$$\vec{K} = -z'(\theta)\,\vec{u}' + r\,\vec{k}.$$

1.2.2.5 Surface définie par une équation

$\Sigma \mid H(x,y,z) = 0$. On montre alors (cf. "tangentes aux courbes algébriques") qu'un[1] vecteur normal à Γ est

$$\frac{\partial H}{\partial x}\,\vec{\imath} + \frac{\partial H}{\partial y}\,\vec{\jmath} + \frac{\partial H}{\partial z}\,\vec{k}.$$

[1] Attention, ce n'est peut-être pas *le* vecteur normal.

2 Aire d'une portion de nappe

Soit Γ l'image d'une nappe paramétrée $\mathcal{C}^1$

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3 \ ; \ \ (u,v) \mapsto M = F(u,v) \, .$$

Soit Σ une partie *mesurable* de Γ.

Définition 5 *L'aire de la portion de nappe (image de) Σ est*

$$\mathcal{A} = \int_\Sigma \mathrm{d}\mu = \int_\Sigma \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \qquad (2)$$

où l'élément différentiel

$$\mathrm{d}\mu = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

est appelé élément d'aire *de Σ.*

2.1 coordonnées cartésiennes

$M = M(u,v) = O + x(u,v) \, \vec{\imath} + y(u,v) \, \vec{\jmath} + z(u,v) \, \vec{k}$;

$$\vec{K} = \tfrac{D(y,z)}{D(u,v)} \, \vec{\imath} + \tfrac{D(z,x)}{D(u,v)} \, \vec{\jmath} + \tfrac{D(x,y)}{D(u,v)} \, \vec{k}$$

donc

$$\mathrm{d}\mu = \sqrt{\left(\tfrac{D(y,z)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\tfrac{D(z,x)}{D(u,v)}\right)^2 + \left(\tfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right)^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Cas particulier : Les paramètres sont x et y.
$z = z(x,y)$; $\vec{K} = -z'_x \, \vec{\imath} - z'_y \, \vec{\jmath} + \vec{k}$ et

$$\mathrm{d}\mu = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

2.2 coordonnées cylindriques

$M = O + r \, \vec{u}(\theta) + z(r,\theta) \, \vec{k}$;

$$\vec{K} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = -r \, z'_r \, \vec{u} - z'_\theta \, \vec{u}' + r \, \vec{k}$$

donc

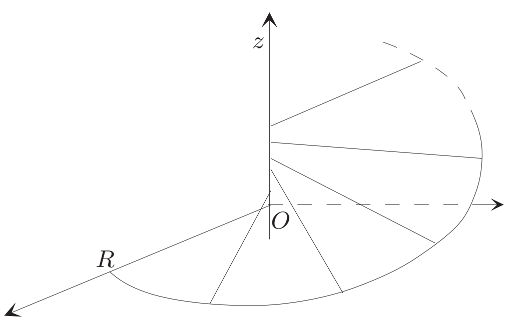
$$\mathrm{d}\mu = \sqrt{r^2 \left(1 + z'^2_r\right) + z'^2_\theta} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

2.2.1 Cas particuliers

2.2.1.1 Conoïde droit d'axe Oz $(z = z(\theta))$.

$$\mathrm{d}\mu = \sqrt{r^2 + z'^2_\theta} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta.$$

Exemple 2 *hélicoïde $z = a\theta$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le R$.*

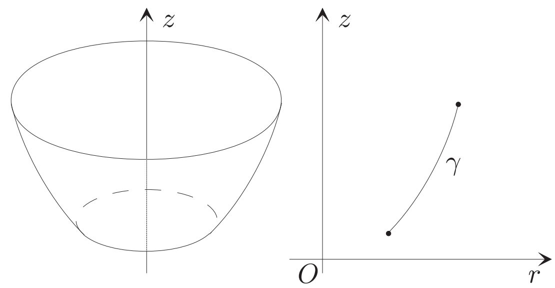


$z'_\theta = a$; $\mathrm{d}\mu = \sqrt{r^2 + a^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$ et

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{r^2 + a^2} \, \mathrm{d}r \\ &= 2\pi \frac{a^2}{2} \left(\operatorname{arg\,sh} \tfrac{R}{a} + \tfrac{R}{a} \sqrt{1 + \tfrac{R^2}{a^2}} \right) \\ &= \pi a^2 \ln \left(\tfrac{R}{a} + \sqrt{1 + \tfrac{R^2}{a^2}} \right) + \pi R \sqrt{a^2 + R^2}. \end{aligned}$$

2.2.1.2 Surface de révolution $(z = z(r))$.

$\vec{K} = r \left(-z'_r \, \vec{u} + \vec{k} \right)$ et $\mathrm{d}\mu = r \sqrt{1 + z'^2_r} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$. Supposons le morceau de nappe Σ engendré par la révolution complète d'un arc *plan* γ :



L'abscisse curviligne s sur γ vérifie $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}r^2 = \mathrm{d}r^2 \left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\right)^2\right)$ soit $\mathrm{d}s = \mathrm{d}r \sqrt{1 + z'^2_r}$ et donc $\mathrm{d}\mu = r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}s$ d'où enfin

$$\mu = 2\pi \int_\gamma r \, \mathrm{d}s.$$

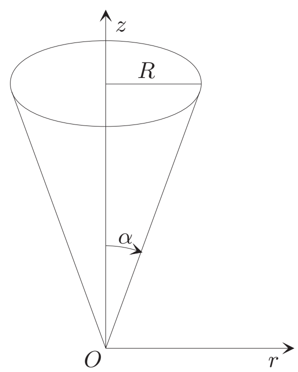
Remarque 1 *Le centre de gravité G de l'arc γ vérifie $L(\gamma) \, r_G = \int_\gamma r \mathrm{d}s$, ce qui donne en combinant avec la formule précédente le*

Théorème 1 (Guldin) *L'aire du morceau de nappe Σ engendré par la révolution complète de l'arc plan γ est égal au produit de la longueur de γ par celle du cercle décrit par le centre de gravité G de γ :*

$$\mu = (2\pi r_G) \, L(\gamma) \, .$$

Un semblable résultat existe pour les volumes.

Exemple 3 *cône $z = r \operatorname{cotan} \alpha$, $0 \le r \le R$.*



$\mathrm{d}s = \mathrm{d}r \sqrt{1 + \operatorname{cotan}^2 \alpha} = \frac{\mathrm{d}r}{\sin \alpha}$; $s = \frac{r}{\sin \alpha}$ et :

$$\mu = 2\pi \int_0^R \frac{r \, \mathrm{d}r}{\sin \alpha} = \frac{\pi R^2}{\sin \alpha}.$$

Remarque 2 $\mu = \left(2\pi \frac{R}{2}\right)\left(\frac{R}{\sin\alpha}\right)$, *cf.* th. 1.

Exemple 4 *sphère* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = r^2 + z^2$.
$r\,\mathrm{d}r + z\,\mathrm{d}z = 0$ donc $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} = z'_r = -\frac{r}{z}$;

$$\mathrm{d}\mu = r\sqrt{1 + \frac{r^2}{z^2}}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = R\frac{r}{z}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

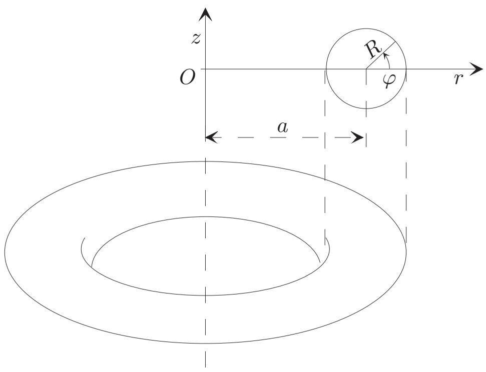
Pour le *calcul* passons en coordonnées sphériques en posant $z = R\cos\varphi$, $r = R\sin\varphi$ d'où $\mathrm{d}r = R\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mu &= R\tfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} R\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= R^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

et finalement :

$$\mu = R^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi R^2.$$

Exemple 5 *tore*



$\mu = 2\pi \int_\Sigma r\,\mathrm{d}s$ avec $\mathrm{d}s = R\,\mathrm{d}\varphi$:
$\mu = 2\pi R \int_0^{2\pi} (a + R\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi^2 aR$.

Remarque 3 $\mu = (2\pi a)(2\pi R)$ — *cf.* th. 1.

3 Flux d'un champ de vecteurs à travers une portion de nappe

Soit Γ l'image d'une nappe paramétrée *orientée* $\mathcal{C}^1$

$$F : \Omega \to \mathbb{R}^3 \ ; \ (u,v) \mapsto M = F(u,v).$$

Soit Σ une partie *mesurable* de Ω. Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs continu au voisinage de Σ.

Définition 6 *Le* flux *de $\vec{V}$ à travers la portion de nappe Σ est le réel*

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{S} &= \iint_\Sigma \left(\vec{V}(M(u,v)) \mid \vec{K}(u,v)\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \iint_\Sigma \mathrm{Det}\left(\vec{V}(M), \frac{\partial\vec{M}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{M}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Exemple 6 *Flux de $\vec{V} = y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} + (x+y)\,\vec{k}$ à travers*

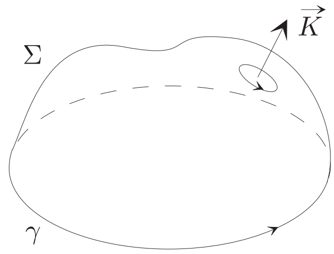
$$\Sigma : \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ x,\ y,\ z \geq 0 \end{cases}.$$

Préciser l'orientation choisie pour Σ (càd pour le vecteur $\vec{K}$ normal à Σ).

3.1 Formule de Stokes

Soit Γ l'image d'une nappe paramétrée *orientée* de classe $\mathcal{C}^1$ $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$; $(u,v) \mapsto M = F(u,v)$.

Soit Σ une partie *mesurable* de Ω dont le *bord* est l'arc γ *muni de l'orientation correspondante* ("règle du tire-bouchon").



Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ au voisinage de Σ.

Théorème 2 (Stokes) *La circulation de $\vec{V}$ le long de γ est égale au flux du rotationnel de $\vec{V}$ à travers Σ :*

$$\int_\gamma \vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{M} = \iint_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{S}. \tag{3}$$

3.2 Formule d'Ostrogradsky

Soit $\mathcal{V}$ une partie bornée de $\mathbb{R}^3$ dont le bord est la nappe $\mathcal{C}^1$ (fermée) Σ, munie de l'orientation canonique du vecteur normal vers l'extérieur.

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\mathcal{V}$.

Théorème 3 (Ostrogradsky) *Le flux ("sortant") de $\vec{V}$ à travers Σ est égal à l'intégrale sur $\mathcal{V}$ de la divergence de $\vec{V}$:*

$$\iint_\Sigma \vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_\mathcal{V} \mathrm{div}\,\vec{V}\,\mathrm{d}\tau, \tag{4}$$

$\mathrm{d}\tau$ dénotant l'élément de volume de $\mathcal{V}$.

3.3 Formule de Green-Riemann

La formule de Green-Riemann est un cas particulier du théorème de Stokes. On se place dans le cas d'une portion de nappe *plane* Σ (càd, contenue dans un plan), limitée par une courbe fermée (plane) γ.

On considère d'autre part un champ de vecteurs *plan* $\vec{V}$ (càd, pour tout $M \in \Omega$, $\vec{V}(M)$ est parallèle à Σ), et $\mathcal{C}^1$ au voisinage de Σ.

On se retrouve dans le cadre de Stokes en considérant que le plan en question est le plan $\mathcal{P} = (O\ ;\ (\vec{\imath}, \vec{\jmath}))$ de $\mathbb{R}^3$. Si $M = F(x,y) = O + x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$, l'orientation de $\mathcal{P}$ est définie par le vecteur normal

$$\vec{K} = \frac{\partial\vec{M}}{\partial x} \wedge \frac{\partial\vec{M}}{\partial y} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}.$$

Notant d'autre part $\vec{V} = P\,\vec{\imath} + Q\,\vec{\jmath}\,(+0\,\vec{k})$, le rotationnel de $\vec{V}$ est

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{V} = 0\,\vec{\imath} + 0\,\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k},$$

donc le théorème de Stokes donne :

Théorème 4 (Green-Riemann)

$$\int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

4 Application aux calculs d'aires planes

On peut utiliser la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire de la portion de plan Σ : il suffit de choisir convenablement P et Q pour avoir au second membre l'élément d'aire du plan ($\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ou $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$).

4.1 Coordonnées cartésiennes

On doit avoir $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ donc par exemple :

- $P = 0$, $Q = x$: $\mu = \int_\gamma x\,\mathrm{d}y$;
- $P = -y$, $Q = 0$: $\mu = -\int_\gamma y\,\mathrm{d}x$;
- $P = -\frac{y}{2}$, $Q = \frac{x}{2}$:

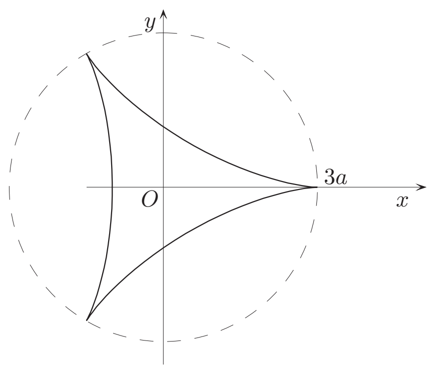
$$\mu = \frac{1}{2}\int_\gamma x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x,$$

cette dernière forme permettant souvent de profiter des symétries que peut présenter Σ, *cf.* l'exemple suivant :

Exemple 7 *deltoïde*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\,(2\cos t + \cos 2t) \\ y = a\,(2\sin t - \sin 2t) \end{array} \right. .$$

C'est l'*hypocycloïde*[2] *à trois points de rebroussement* (lieu d'un point d'un cercle de rayon a roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon $3a$). Pour cette raison, on verrait mieux en coordonnées polaires l'invariance par rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Néanmoins, les coordonnées cartésiennes sont bien adaptées au calcul de l'aire.



On utilise la troisième forme de Green-Riemann :

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \\
&= 2a^2 \int_0^{\pi} (2\cos t + \cos 2t)(\cos t - \cos 2t) \\
&\quad - (2\sin t - \sin 2t)(-\sin t - \sin 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2 \int_0^{\pi} (1 + \sin t \sin 2t - \cos t \cos 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2a^2 \int_0^{\pi} (1 - 3\cos t)\,\mathrm{d}t = 2a^2 \left[t - \frac{\sin 3t}{3} \right]_0^{\pi} \\
&= 2\pi a^2.
\end{aligned}$$

[2] *Cf.* TD "épi- / hypocycloïdes".

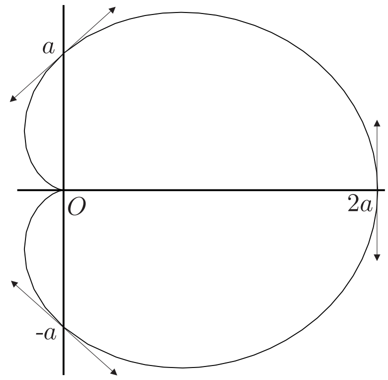
4.2 Coordonnées polaires

On peut aussi envisager le cas des coordonnées polaires. La formule de Green-Riemann devient alors (en remplaçant x et y par r et θ) : $\int_\gamma P\,\mathrm{d}r + Q\,\mathrm{d}\theta = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$, et pour que l'intégrande coïncide avec l'élément d'aire $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ des polaires on doit avoir $\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial P}{\partial \theta} = r$; un choix classique est : $P = 0$, $Q = \frac{r^2}{2}$ d'où

$$\mu = \frac{1}{2}\int_\gamma r^2\,\mathrm{d}\theta.$$

Exemple 8 *cardioïde $r = a\,(1 + \cos\theta)$.*

La cardioïde est l'*épicycloïde*[2] *à un point de rebroussement* : lieu d'un point d'un cercle de rayon a roulant sans glisser à l'extérieur d'un autre cercle de même rayon a.



On applique directement la formule ci-dessus :

$$\begin{aligned}
\mu &= 2\int_0^{\pi} \frac{a^2\,(1+\cos\theta)^2}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right)\mathrm{d}\theta \\
&= a^2 \left[\frac{3\theta}{2} + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_0^{\pi} = \frac{3\pi a^2}{2}.
\end{aligned}$$