PCSI - mathématiques

Calcul différentiel

Dans ce chapitre, n est un entier naturel (égal à 2 en pratique). $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure affine et de sa structure euclidienne si nécessaire.

1 L'espace $\mathbb{R}^n$

1.1 Normes sur $\mathbb{R}^n$

Soit $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. On note

$$\begin{array}{rclcl} N_1(x) & = & \|x\|_1 & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| \\ N_2(x) & = & \|x\|_2 & = & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \\ N_\infty(x) & = & \|x\|_\infty & = & \displaystyle\max_{1\leq i\leq n} |x_i| \end{array}$$

Chaque application $N_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ ($i \in \{1, 2, \infty\}$) vérifie les trois axiomes suivants :

(N1) $N_i(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n}$;

(N2) $N_i(x + y) \leq N_i(x) + N_i(y)$ (inégalité triangulaire) ;

(N3) $N_i(\lambda x) = |\lambda| N_i(x)$.

On dit que N_i est une *norme* sur $\mathbb{R}^n$. On lui associe une *distance* d_i définie par

$$d_i(x, y) = N_i(y - x)$$

pour tous x, $y \in \mathbb{R}^n$.

On peut comparer les trois normes N_1, N_2 et N_∞ en tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty\,. \tag{1}$$

Il en résulte que pour tous i, $j \in \{1, 2, \infty\}$ on peut trouver des constantes α, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ telles que : $\alpha N_i \leq N_j \leq \beta N_i$. On dit que ces normes sont *équivalentes.*

1.2 Boules ouvertes ; fermées

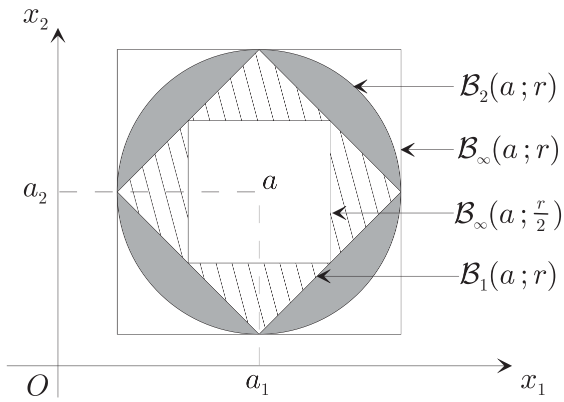
Soient $i \in \{1, 2, \infty\}$ et $a \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}_i(a\ ;\ r) & = & \mathcal{B}_{N_i}(a\ ;\ r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_i(a, x) < r\} \\ \mathcal{B}'_i(a\ ;\ r) & = & \mathcal{B}'_{N_i}(a\ ;\ r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_i(a, x) \leq r\} \end{array}$$

$\mathcal{B}_i(a\ ;\ r)$ (*resp.* $\mathcal{B}'_i(a\ ;\ r)$) est la *boule ouverte* (*resp. fermée*) de centre a et de rayon r pour N_i.

Notons que les inégalités (1) se traduisent par des inclusions entre les boules ouvertes (ou fermées) pour les différentes normes :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{B}_\infty\left(a\ ;\ \frac{r}{n}\right) & \subset & \mathcal{B}_1(a\ ;\ r) \\ & \subset & \mathcal{B}_2(a\ ;\ r) \quad\subset\quad \mathcal{B}_\infty(a\ ;\ r)\,. \end{array} \tag{2}$$



boules dans $\mathbb{R}^2$ ($n = 2$)

1.3 Parties bornées

Définition 1 *Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est* bornée *s'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $A \subset \mathcal{B}_i(a\ ;\ R)$.*

Cette définition est indépendante de la norme N_i choisie (d'après les inclusions (2)). En outre, le point a est arbitraire (d'après l'inégalité triangulaire).

Exemple 1

- *$\varnothing$, les singletons, et plus généralement les parties finies ;*
- *les boules ouvertes ou fermées.*

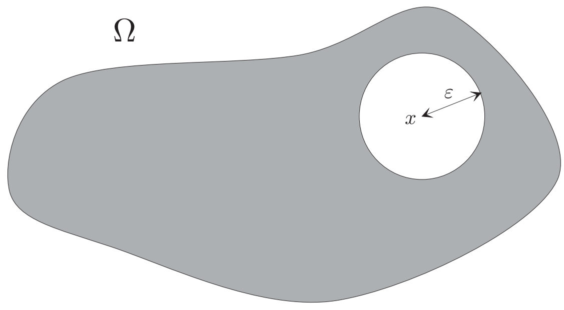
1.4 Parties ouvertes

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Définition 2 *Ω est un* ouvert *de $\mathbb{R}^n$ si pour tout $x \in \Omega$,*

$$\exists\varepsilon > 0,\ \mathcal{B}_i(x\ ;\ \varepsilon) \subset \Omega. \tag{3}$$

Cette condition (3) s'énonce parfois "Ω est un voisinage de x". Elle signifie que dans Ω, on peut trouver des points arbitrairement proches de x dans toutes les directions.



On ne précise pas si l'indice i est égal à 1, 2 ou ∞ ; c'est en effet inutile compte tenu des inclusions (2). La définition donne le même résultat avec les trois normes standard sur l'espace $\mathbb{R}^n$.

Exemple 2

- *$\varnothing$, $\mathbb{R}^n$;*
- *les boules ouvertes ;*
- *$\mathbb{R}^n - \{a\}$ si $a \in \mathbb{R}^n$;*
- *$\mathbb{R}^n - F$ si F est une sva de $\mathbb{R}^n$.*

2 Limites et continuité

Grâce aux normes (qui généralisent la notion de valeur absolue) on étend les définitions analytiques sur les fonctions numériques. Munissons $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de normes quelconques $\|\cdot\|_n$ et $\|\cdot\|_p$.

2.1 Notion de limite

Soit $f : D \to \mathbb{R}^p$ une application définie sur une partie D de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. On fait l'hypothèse suivante notée $(\mathrm{H}_f(a))$[1] :

il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ tel que $\Omega - \{a\} \subset D$.

Définition 3 *f* admet une limite *en a s'il existe $\ell \in \mathbb{R}^p$ tel que*

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > \; & 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \\ & \|x - a\|_n < \alpha \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_p < \varepsilon.\end{aligned}$$

ℓ est alors unique : c'est *la* limite de f en a notée

$$\ell = \lim_a f = \lim_{x \to a} f(x).$$

On montre de même que pour les applications numériques les propriétés algébriques des limites.

La définition (3) admet un cas particulier important : celui où le point a appartient au domaine D de la fonction f.

Lemme 1 *Si f vérifie l'hypothèse $(\mathrm{H}_f(a))$, admet une limite ℓ en a et si de plus f est définie en a alors : $\ell = f(a)$.*

On dit alors que f est *continue* en a.

2.2 Applications continues

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ une application définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \Omega$.

Définition 4 *f est* continue *en a si $\lim_a f = f(a)$, càd*

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > \; & 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in D, \\ & \|x - a\|_n < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_p < \varepsilon.\end{aligned}$$

[1] On dit que a est *adhérent* à D. Cela signifie que D, à défaut de contenir le point a, contient des points arbitrairement proches de lui. En vertu de la définition (3), il n'est pas restrictif de supposer que Ω est une boule ouverte centrée en a.

On déduit de cette définition les mêmes propriétés fonctionnelles que pour les fonctions numériques, notamment

Proposition 1 *Si $f : \Omega \to \Omega'$ est continue en $a \in \Omega$ et si $g : \Omega' \to \mathbb{R}^q$ est continue en $f(a)$, $g \circ f$ est continue en a.*

Définition 5 *$f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ est* continue sur Ω *si f est continue en tout $a \in \Omega$.*

Ces définitions peuvent être étudiées (mais non caractérisées !) à l'aide de la notion suivante.

2.3 Applications partielles

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ une application définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in \Omega$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

Pour tout réel $x_i \in \mathbb{R}$ tel que le point $(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n)$ appartienne à Ω on pose

$$f_{i,a}(x_i) = f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n).$$

L'application $f_{i,a}$ est définie sur une partie[2] Ω_i de $\mathbb{R}$. $f_{i,a}$ est la $i^{\text{ème}}$ *application partielle de f en a.*

On vérifie facilement

Proposition 2 *Si f est continue en a, f_i est continue en a_i pour $i = 1, ..., n$.*

Toutefois, attention : cette condition de continuité est nécessaire, pas suffisante, comme le montre le contre-exemple suivant :

Exemple 3 *f est l'application définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f(0,0) = 0$ et $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$ si $(x_1, x_2) \neq (0,0)$.*

3 Dérivées partielles

3.1 Dérivées partielles premières

On se place dans les mêmes conditions qu'au paragraphe précédent.

Définition 6 *La $i^{\text{ème}}$* dérivée partielle *de f en a est, si elle existe, la dérivée en a_i de la $i^{ème}$ application partielle de f en a. On la note $D_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$[3] (C'est un vecteur de $\mathbb{R}^p$).*

On a donc :

$$\begin{aligned} D_i f(a) &= \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = f_i'(a_i) \\ &= \lim_{x_i \to a_i} \frac{1}{x_i - a_i}\big(f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \\ &\qquad - f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, ..., a_n)\big) \\ &= \lim_{x_i \to a_i} \frac{1}{x_i - a_i}\left(f(a + (x_i - a_i) e_i) - f(a)\right) \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left(f(a + t\, e_i) - f(a)\right) \end{aligned}$$

en notant $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Il faut bien faire attention à une différence importante avec les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$: *l'existence des dérivées partielles en a n'implique nullement la continuité de l'application f en a.* On peut se reporter à l'exemple 3.

La dernière notation suggère la généralisation suivante :

[2] On montre que cette partie Ω_i est un *ouvert* de $\mathbb{R}$.

[3] Fréquemment si les coordonnées sont notées x, y (z) les dérivées partielles sont aussi notées $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ ($\frac{\partial f}{\partial z}(a)$).

Dérivée directionnelle

Soit b un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. $f\,(a+t\ b)$ est défini pour t "assez petit" (puisque si $\mathcal{B}_n\,(a\ ;\ \varepsilon)\subset\Omega$, $a+t\ b\in\Omega$ pour $|t|<\frac{\varepsilon}{\|b\|_n}$). Ceci permet de poser :

Définition 7 La dérivée de f en a selon b est, si elle existe, la limite :

$$\vec{f}'_b(a)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(a+t\ b)-f(a)\right).$$

Il s'agit encore d'un vecteur de $\mathbb{R}^p$. Les dérivées partielles deviennent un cas particulier de cette nouvelle définition :

$$D_i f(a)=\vec{f}'_{e_i}(a) \tag{4}$$

où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3.2 Fonctions $\mathcal{C}^1$

Supposons que l'application $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ admette des dérivées partielles en tout point $a\in\Omega$. On obtient alors n applications $D_i f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ que l'on peut étudier à leur tour, au même titre que f, d'abord du point de vue de la continuité.

Définition 8 *L'application f est dite* de classe $\mathcal{C}^1$ *sur Ω si les n dérivées partielles $D_i f$ sont* continues *sur Ω.*

Les applications $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert admettent en tout point un "développement limité à l'ordre 1" par le biais de la notion de différentielle.

3.2.1 Différentielle

Soit $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ définie sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Définition 9 *La* différentielle *de f en a est l'application (linéaire) L de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ définie, pour tout vecteur $h=(h_1,...,h_n)\in\mathbb{R}^n$ par :*

$$L(h)=\sum_{i=1}^{n}h_i\,D_i f\,(a)$$

Notation 1 *On écrit $L=\mathrm{d}f(a)$ et $L\,(h)=\mathrm{d}f\,(a)\bullet h$, donc :*

$$\mathrm{d}f(a)\bullet h=\sum_{i=1}^{n}h_i\,D_i f\,(a) \tag{5}$$

Le membre de droite est une c.l. des vecteurs $D_i f\,(a)$ de $\mathbb{R}^p$ dont les coefficients sont les coordonnées h_i du vecteur $h\in\mathbb{R}^n$.

On montre (DL à l'ordre 1 pour une fonction $\mathcal{C}^1$) :

Théorème 1 *Si $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω et si $a\in\Omega$, $h\in\mathbb{R}^n$ et $a+h\in\Omega$:*

$$\begin{aligned}f\,(a+h)&=f\,(a)+\mathrm{d}f\,(a)\bullet h+\vec{o}\,(\|h\|_n)\\&=f\,(a)+\sum_{i=1}^{n}h_i\,D_i f\,(a)+\|h\|_n\ \vec{\varepsilon}\,(h)\end{aligned}$$

où $\vec{\varepsilon}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ admet pour limite $0_{\mathbb{R}^p}$ en $0_{\mathbb{R}^n}$.

Corollaire 1 *Si $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω alors f est continue sur Ω.*

C'est aussi le th. 1. qui garantit que la notion de différentielle est la "bonne" généralisation de la dérivabilité aux fonctions de plusieurs variables.

Plus formellement, pour une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$, f admet une différentielle en a *ssi* f est dérivable en a.

En outre, la notion de différentielle respecte bien les opérations algébriques sur les fonctions (combinaisons linéaires p. ex.). Notons l'important résultat suivant :

Théorème 2 *Si $f:\Omega\to\Omega'$ et $g:\Omega'\to\mathbb{R}^q$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leurs ouverts de définition respectifs $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ et $\Omega'\subset\mathbb{R}^p$, $g\circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et pour tout $a\in\Omega$:*

$$\mathrm{d}(g\circ f)(a)=\mathrm{d}g(f(a))\circ\mathrm{d}f(a).$$

Corollaire 2 *si $u:I\to\Omega$ est dérivable sur I et si $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ est $\mathcal{C}^1$ sur Ω, $f\circ u$ est dérivable sur I et pour tout $t_0\in I$:*

$$(f\circ u)'\,(t_0)=\mathrm{d}f(u(t_0))\bullet u'(t_0).$$

Si $u=(u_1,...,u_n)$ la formule précédente s'écrit :

$$(f\circ u)'\,(t_0)=\sum_{i=1}^{n}u_i'(t_0)\ D_i f(u(t_0)).$$

ce qui permet également de calculer les dérivées partielles d'une application composée (dans le cas où u est l'application partielle d'une fonction de plusieurs variables).

Exemple 4 *Dérivées partielles de $g=f\circ u$ où u est l'application $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.*

Cas particulier : En posant $u\,(t)=a+t\ b$ où $a\in\Omega$ et $b\in\mathbb{R}^n$ on obtient la dérivée de $t\mapsto f(a+tb)$: c'est l'application $t\mapsto\mathrm{d}f(a+tb)\bullet b$. On en déduit la relation suivante entre les notions de différentielle et de dérivée directionnelle :

Proposition 3 *Si $f:\Omega\to\mathbb{R}^p$ est $\mathcal{C}^1$ sur Ω et si $a\in\Omega$, alors $\vec{f}'_b(a)$ existe pour tout b et $\vec{f}'_b(a)=\mathrm{d}f(a)\bullet b$.*

Ce dernier résultat exprime une *condition nécessaire* et peut être utilisé p. ex. pour nier le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction f.

3.2.2 Matrice jacobienne

Les matrices fournissent une représentation adéquate des résultats précédents. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a\in\Omega$.

Définition 10 *La matrice jacobienne de f en a est la matrice représentative de l'application linéaire $\mathrm{d}f\,(a)$ dans les bases canoniques $\mathcal{E}_n$ de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{E}'_p$ de $\mathbb{R}^p$:*

$$\mathrm{jac}_f\,(a)=\mathrm{mat}\left(\mathrm{d}f\,(a)\ ;\ \mathcal{E}'_p,\mathcal{E}_n\right).$$

Notons $A=(a_{i,j})$ cette matrice ($\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$). Par définition $a_{i,j}=e'^{*i}\,(\mathrm{d}f\,(a)\bullet e_j)$, or $\mathrm{d}f\,(a)\bullet e_j=\vec{f}'_{e_j}(a)=D_j f\,(a)$ (d'après la proposition 3. et la relation (4)). Maintenant, si l'on note $(f_1,...,f_p)$ les coordonnées de l'application f, il est immédiat que $D_j f\,(a)=(D_j f_1\,(a)\,,...,D_j f_p\,(a))=\sum_{i=1}^{p}D_j f_i\,(a)\ \ e'_i$ et finalement $a_{i,j}=D_j f_i\,(a)=\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(a)$. On peut donc conclure :

Proposition 4 *La matrice jacobienne de f en a est*

$$\operatorname{jac}_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}}.$$

Lorsque $n = p$, le *jacobien* de f en a est défini par

$$J_f(a) = \det\left(\operatorname{jac}_f(a)\right).$$

Prenons les matrices de la relation du th. 2. dans les bases canoniques. On obtient

$$\begin{aligned}
\operatorname{jac}_{g\circ f}(a) &= \operatorname{mat}\left(\mathrm{d}(g\circ f)(a)\ ;\ \mathcal{E}_q'', \mathcal{E}_n\right)\\
&= \operatorname{mat}\left(\mathrm{d}g(f(a))\circ \mathrm{d}f(a)\ ;\ \mathcal{E}_q'', \mathcal{E}_n\right)\\
&= \operatorname{mat}\left(\mathrm{d}g(f(a))\ ;\ \mathcal{E}_q'', \mathcal{E}_p'\right)\\
&\quad \times \operatorname{mat}\left(\mathrm{d}f(a)\ ;\ \mathcal{E}_p', \mathcal{E}_n\right)\\
&= \operatorname{jac}_g(f(a))\times \operatorname{jac}_f(a).
\end{aligned}$$

ce qui donne une semblable relation pour les jacobiens si $n = p = q$.

3.3 Dérivées d'ordre supérieur

Dans l'étude des dérivées partielles d'une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω, il n'y a pas lieu de se limiter à la continuité. Si pour deux indices i et j la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle admet elle-même une $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle en $a\in\Omega$ on définit la *dérivée partielle seconde* de f en a :

$$\begin{aligned}
D_{i,j}^2 f(a) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\\
&= D_i(D_j f)(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a).
\end{aligned}$$

Attention, dans cette écriture, bien que l'indice i soit typographiquement le 1[er], le calcul de $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle intervient *en dernier*. Le théorème 3. réduit souvent l'importance de cette remarque en pratique.

Si ces quantités sont définies pour tout $a\in\Omega$ on peut à nouveau étudier leur continuité, l'existence des dérivées partielles. On définit ainsi de proche en proche si $i_1,...,i_k\in [\![1,n]\!]$:

$$\begin{aligned}
D_{i_1,...,i_k}^k f(a) &= \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}}(a)\\
&= D_{i_1}\left(D_{i_2,...,i_k}^{k-1} f\right)(a)\\
&= \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2}...\partial x_{i_k}}\right)(a).
\end{aligned}$$

($(i_1,...,i_k)^{\text{ème}}$ dérivée partielle d'ordre k de f en a).

Exemple 5 *dérivées partielles d'ordre 2 de l'application $f : (x_1,x_2)\mapsto e^{x_1^2 x_2}\sin(x_1+x_2)$.*

Définition 11 *f est* de classe $\mathcal{C}^k$ *sur l'ouvert Ω si f admet des dérivées partielles d'ordre k, $D_{i_1,...,i_k}^k f$, pour tous $i_1,...,i_k\in [\![1,n]\!]$, et si celles-ci sont* continues sur Ω.

Le théorème suivant réduit le nombre de calculs nécessaires pour connaître toutes les dérivées partielles d'une application $\mathcal{C}^k$, $k\geq 2$, sur Ω.

Théorème 3 (Schwarz) *Si $f : \Omega\to\mathbb{R}^p$ est $\mathcal{C}^2$ sur Ω, pour tout $a\in\Omega$:*

$$D_{i,j}^2 f(a) = D_{j,i}^2 f(a).$$

Ce théorème, qui se généralise trivialement par récurrence aux ordres de dérivation > 2, permet de "regrouper les indices de dérivations partielles".

4 Fonctions numériques

Lorsque la fonction f va d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ ($p = 1$), la question de l'étude des extrema devient possible. On peut aussi dégager la notion de gradient.

4.1 Gradient d'une application à valeurs réelles

Soit $f : \Omega\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. $\mathrm{d}f(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ (une *forme linéaire* sur $\mathbb{R}^n$). Donc la relation (5) qui la définit s'interprète comme un produit scalaire calculé dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (puisque les $D_i f(a)$ sont ici des nombres réels). On écrit

$$\mathrm{d}f(a)\bullet h = (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(a)\,|\,h)$$

où

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(a) = (D_1 f(a),...,D_n f(a)).$$

Définition 12 *Le vecteur $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(a)$ ($\in\mathbb{R}^n$) est le* gradient *de f en a.*

(*cf.* le cours "opérateurs différentiels" pour plus de détails.)

4.2 Extrema locaux

L'application f est définie sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. Soit $a\in\Omega$.

Définition 13 *f admet un* maximum *(resp.* minimum*)* local *en a s'il existe $r>0$ tel que pour tout $x\in\mathcal{B}_n(a\ ;\ r)$ on ait $f(x)\leq f(a)$ (resp. $f(x)\geq f(a)$). f admet un* extremum local *en a si elle admet un maximum ou un minimum local en a.*

On peut détecter les extrema locaux à l'aide de la propriété suivante :

Théorème 4 (C.N. d'extremum) *Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et admet un extremum local en $a\in\Omega$ alors :*

$$\mathrm{d}f(a) = 0$$

(application nulle de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$).

Donc, pour rechercher les extrema éventuels de f, on commence par rechercher ses *points critiques*, càd ceux qui annulent $\mathrm{d}f$ (donc $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f$) puis pour chaque tel point critique $a = (a_1,...,a_n)$ on étudie le signe de la différence $f(a+h)-f(a) = f(a_1+h_1,...,a_n+h_n)-f(a_1,...,a_n)$.