Oraux des "Minettes" - session 1998

Planche 1
planche 129
I) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^{3+\cos x}$.
II) Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$.

Planche 2
Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f \in E$, et $T(f) = g$ l'application définie par

$$g(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que T est un endomorphisme de E. Déterminer $\ker T$ et $\operatorname{Im} T$.

Planche 3
I) Résoudre l'équation différentielle : $xy' + y = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.
II) Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $D = \mathrm{Vect}((1,3))$ et $D' = \mathrm{Vect}((-2,4))$.
1. Montrer que $D \oplus D' = \mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la projection sur D parallèlement à D'.

Planche 4
I) On cherche à résoudre l'équation

$$(1 - \mathrm{i}z)^3(1 + \mathrm{i}\tan\alpha) = (1 + \mathrm{i}z)^3(1 - \mathrm{i}\tan\alpha)$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, avec $\alpha \in\ ]-\pi/2, \pi/2[$ fixé.
1. Montrer que $-\mathrm{i}$ n'est pas racine de l'équation.
2. Déterminer $\left|\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right|$ et en déduire que toutes les solutions sont réelles.
3. En déduire l'ensemble des solutions.
II) Étudier la parité de $f : x \mapsto \int_x^{3x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Planche 5
I) Tracer la courbe d'équation polaire $\rho = \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$.
II) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ telle que $f \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\, f < 2$.

Planche 6
I) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\mathrm{d}t$.
1. Justifier l'existence de I_n pour $n \geq 1$.
2. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
II) Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique (i,j) et de sa structure euclidienne usuelle. Déterminer la matrice dans (i,j) de la symétrie orthogonale par rapport à $D = \mathrm{Vect}(3i + 5j)$.

Planche 7
I) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$. Étudier la convergence de la suite et sa limite éventuelle.
II) Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, et $(f,g) \in \mathcal{L}(E)^2$ telles que :

$$E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \ker f + \ker g.$$

Montrer que les deux sommes sont directes.

Planche 8
Tracer la courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x = t^2 + \frac{2}{t} \\ y = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}$.

Planche 9
I) Déterminer $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
II) Résoudre dans $\mathbb{C}^3$ le système :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}.$$

Planche 10
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
1. Étudier la convergence de (u_n).
2. Calculer la valeur de $\int_0^1 (n+1)\,t^n \mathrm{d}t$.
3. Déterminer la limite de $((n+1)\,u_n)$.
4. Déterminer la limite de (nu_n).

Planche 11
I) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe a_n et b_n, que l'on déterminera, tels que

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

II) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \sqrt{\cos x}$.
III) Déterminer $\int \frac{1}{\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x$.

Planche 12
I) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f(1) = 0$$

et φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ si } x \neq 0,\ \varphi(0) = 0.$$

1. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.
2. Montrer que φ' s'annule sur $]0,1[$ et qu'il existe une tangente à la courbe de f en un point d'abscisse dans $]0,1[$ passant par l'origine.
II) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne canonique, donner l'expression analytique de la projection orthogonale par rapport à P d'équation $x+y+z=1$.

Planche 13
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n : x \to x^{n+2} - 2x + 1$.
1. Combien le polynôme P_n a-t-il de racines dans $]0,1[$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit c_n une racine de P_n dans $]0,1[$. La suite (c_n) a-t-elle une limite lorsque $n \to \infty$? Si oui, calculer cette limite.

Planche 14
Soit $E = \mathbb{R}^3[X]$ et $f : E \to E$; $P \mapsto P(X+2) + P(X) - P(X+1)$.
1. Montrer que $f(E) \subset E$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.
3. Peut-on trouver une base b de E telle que $\operatorname{Mat}_b(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

Planche 15
Soit $A = (a_{ij})$ une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
1. Montrer que $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| \leq 3\sqrt{3}$.
2. Étudier les cas d'égalité.

Planche 16
I) Soit $E = \mathbb{R}^2[X]$ et pour $(P,Q) \in E^2$, on pose

$$\varphi(P,Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1).$$

1. L'application φ est-elle un produit scalaire sur E ?
2. Déterminer une base orthogonale de (E,φ), notée (P_0,P_1,P_2), telle que pour tout $i \in [\![0,2]\!]$, $\deg P_i = i$.
3. Normer P_2.
II) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $f \exp(f) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$. Donner les variations de f.

Planche 17
On se place dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ et
$f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z + a\bar{z} \end{array} \right.$.
1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Sans calculs, montrer que la somme $\ker f + \operatorname{Im} f$ est directe.
3. Soit $z = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. Déterminer $|f(z)|$ et $\operatorname{Arg} f(z)$ en fonction de R, a et t.
4. Trouver et décrire $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

Planche 18
Soit P un plan euclidien, u et v deux vecteurs unitaires de P et $s = (u \mid v)$.
1. Montrer que (u,v) est libre si et seulement si $|s| \neq 1$.
2. On suppose (u,v) libre. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique vecteur x de P tel que $(u \mid x) = a$ et $(v \mid x) = b$.

Planche 19
Soit (u_n) et (v_n) définies par $(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = (\mathrm{e}^{-x}\operatorname{ch} x)\, u_n + (\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sh} x)\, v_n \\ v_{n+1} = (\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sh} x)\, u_n + (\mathrm{e}^{-x}\operatorname{ch} x)\, v_n \end{cases}$$

Montrer que si $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{u_0+v_0}{2}$.

Planche 20
I) 1. Trouver deux complexes a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x+\mathrm{i}} + \frac{b}{x-\mathrm{i}}.$$

2. En déduire la dérivée n-ième de arctan.
II) Soit E un K-espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ et q un projecteur de E tels que $\ker q \subset \ker p$. Montrer que $p \circ q = p$.

Planche 21
I) Quel est le déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire ?
II) 1. Étudier la convergence de la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^1 x^n \ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$.

Planche 22
I) Soit $n \in \mathbb{N}$, $F_n = (X^2-1)^n$ et P_n le polynôme dérivé d'ordre n de F.
1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. Déterminer A et B tels que $AF_n' - BF_n = 0$.
3. Montrer que P_n vérifie la relation : $(X^2-1)P_n'' + 2XP_n' - n(n+1)Pn = 0$.
II) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
1. Montrer que A est inversible.
2. Calculer A^{-1} sans utiliser la méthode classique.
III) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour $n > 1$.

Planche 23
Soit $n \geq 1$. On pose, pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha \neq \beta$:

- $E(\alpha) = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(\alpha) = 0\}$;
- $E(\beta) = \{P \in R_n[X] \mid P(\beta) = 0\}$;
- $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(\alpha) = P(\beta) = 0\}$.

1. $E(\alpha)$, $E(\beta)$ et E sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$?
2. Soit $u : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P \mapsto P(\alpha)X + P(\beta) \end{array} \right.$.
a) Montrer que u est un endomorphisme.
b) Déterminer $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$.
3. Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = E(\alpha) + E(\beta)$.

4. La somme est-elle directe ?

Planche 24

I) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $4^{4n+2} - 3^{n+3}$ est divisible par 11.
II) Résoudre, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y'' + y = \sin nx$.

Planche 25

1. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = f(a + b - x)$. Montrer que :

$$\int_a^b x f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

2. Calculer $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \mathrm{d}x$.

Planche 26

I) Étudier la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \frac{1+2u_n}{1+3u_n}$.
II) Soit E un espace vectoriel euclidien, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une famille de vecteurs unitaires tels que pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x \mid e_i)^2$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

Planche 27

Soit $f_\lambda : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3 \\ P \mapsto (P(-2), P(2), P(\lambda)) \end{array} \right.$.
1. Trouver le noyau et le rang de f_λ.
2. Existe-t-il une solution de degré 3 à l'équation $f_\lambda(P) = (3, 2, 1)$?
Est-elle unique ?
3. Trouver les solutions de degré 2 au plus, puis résoudre complètement l'équation ci-dessus.

Planche 28

I) Calculer $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x - \cos x}$.
II) Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée, déterminer l'endomorphisme associé à la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Planche 29

On considère la fonction f définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^\gamma}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$.
1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α, β et γ pour que f soit continue en $(0, 0)$.
2. Calculer les dérivées partielles de f au point (a, b).
3. f est-elle dérivable en $(0, 0)$?
4. f admet-elle un développement limité à l'ordre 1 en $(0, 0)$?

Planche 30

I) Étude et tracé de la courbe de f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x} \frac{(x-1)^2}{x}$.
II) Calculer l'inverse de $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.