Oraux des "Minettes" - session 2004

Filière MP

Planche I
I) Étudier la suite réelle de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$.
II) Calculer M^{2001} et M^{2002} avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & \mathrm{j} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$ où $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$.

Planche 2
I) Trouver le reste de la division euclidienne de X^n+X+b par $(X-a)^2$.
II) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-(n+x)^2\pi} + \sum_{n>0} \mathrm{e}^{-(-n+x)^2\pi}$.

Montrer que sa somme est 1-périodique et la développer en série de Fourier (on rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2} \cos u \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-\pi^2/4}$.
III) Cours : donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une matrice soit diagonalisable.

Planche 3
I) Déterminer l'ensemble des endomorphismes vérifiant $\ker f = \operatorname{Im} f$ dans $\mathbb{R}^2$, puis dans $\mathbb{R}^3$, enfin dans $\mathbb{R}^4$.
II) Étudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \int_1^n \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x$.

Filière PC

Planche 4
I) Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E et D l'ensemble des endomorphismes v tels que $v \circ u = u \circ v = 0$.
Que peut-on dire de la structure de D ?
Donner une CNS pour que $D = \{0\}$.
On suppose E de dimension 4 et soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de u dans la base canonique ; expliciter le noyau et l'image de u, puis donner la dimension de D.
II) Étudier la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$ où α et β sont deux réels distincts et $n \geq 2$.

Planche 5
I) Existence de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t \sin t}{t^2} \mathrm{d}t$.
Étudier les séries de terme général $v_n = \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\arctan t \sin t}{t^2} \mathrm{d}t$ et $(-1)^n v_n$.
II) Soit A une matrice réelle, carrée d'ordre n, de trace non nulle. Vérifier que l'application définie par $f(M) = \operatorname{tr}(M)A - \operatorname{tr}(A)M$ est linéaire. Étudier ses sous-espaces propres. Est-elle diagonalisable ?

Planche 6
I) Développement limité du numérateur de $f(x) = \frac{1-\cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x}{(\tan x - x)^{4/3}}$ à l'ordre 4 en 0.
Équivalent du dénominateur. En déduire la limite de f en 0.
II) Soit un espace affine euclidien orienté, muni d'un repère orthonormé direct (O, i, j, k). Trouver le lieu des points équidistants aux plans $(P) : x + 2y - z - 4 = 0$ et $(Q) : x\sqrt{2} - 4z + 3 = 0$.

Planche 7
I) Montrer que $(f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, g(t) \,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques.
II) Soit $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_i)^{m_i}$. Calculer $\frac{P'(X)}{P(X)}$.
III) Développement en série entière de $\frac{1}{x^2+x+1}$.

Planche 8
I) Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.
II) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la courbe d'équation $x^2 - 2y^2 + x - 2y = 0$.
III) Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \mathrm{d}x$ puis la calculer.

Filière PSI

Planche 9
I) Montrer que $\varphi : u \mapsto \frac{1-\cos u}{u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
II) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine.

Planche 10
I) Montrer que u défini par $u(P)(X) = X(X-1)P'(X) - nXP(X)$ est un endomorphisme de l'ensemble des polynômes de degré au plus n. Déterminer son image et son noyau.
II) Ensemble de définition, continuité, dérivabilité de : $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.
