Oraux des "Minettes" - session 2003

Filière MPSI

Planche I

I) Domaine de définition, dérivée, variations et étude des asymptotes de $f(x) = 2\ln(1+x^2) - \frac{1}{x}$.

II) Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $g(x) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{\alpha x}} - \frac{1}{x}$.

Planche 2

I) Domaine de définition, dérivée, variations et étude des asymptotes de $f(x) = \arcsin\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)$.

II) Résoudre l'équation différentielle $y'' + 6y' + 9y = \mathrm{ch}(3x) + \cos x$.

Planche 3

I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$

À quelle(s) condition(s) le système $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=2a \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$ où a est un réel admet-il au moins un triplet (x,y,z) solution ?

II) Cours : énoncé et démonstration du théorème de Rolle et du théorème des accroissements finis.

Filière PCSI

Planche 4

I) Soit f continue sur $[a,b]$, montrer que

$$\forall x \in [a,b]\,,\ \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(a+b)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

II) Calculer $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

Planche 5

I) Soit b un vecteur de $\mathbb{R}^3$ euclidien muni d'une base B orthonormée et p l'endomorphisme défini par $p(x) = b \wedge x$; déterminer la matrice de p dans B en fonction des coordonnées de b dans B. Que remarque-t-on ? Une matrice antisymétrique d'ordre 3 est-elle inversible ?

II) Soit $a > 0$ et f_a définie par $f_a(x) = \frac{1}{a^2\cos^2 x + \sin^2 x}$.

1. Déterminer sur quels domaines $\phi(t) = \frac{1}{1-\alpha^2 t^2}$ et $\psi(t) = \frac{1}{1+\alpha^2 t^2}$ sont intégrables et calculer leurs primitives.

2. Calculer $J_a = \int_0^{\pi/2} f_a(u)\sin u\mathrm{d}u$ pour $a=1$ et $a \neq 1$.

3. Soit F_a la primitive de f_a telle que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $F_a(x) = \int_0^x f_a(t)\,\mathrm{d}t$; montrer la parité de F_a ; calculer $F_a(x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

III) Étudier la branche infinie de $f(x) = \frac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$ à l'aide de développements limités.

Planche 6

I) Montrer que $\forall n \geq 1$, $u_n = \frac{1}{1+n^2} \leq \int_{n-1}^n \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.
Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ converge (on pourra montrer que $S_n \leq \frac{\pi}{2}$).

II) Ajuster a et b pour que $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{\ln(1+x)} - \frac{b}{\mathrm{e}^x - 1}$ tende vers 0 quand x tend vers 0 ; montrer alors que $f(x) = o(x^2)$.

III) Soit s une symétrie de direction G de dimension p, F un supplémentaire de G. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de s est diagonale. En déduire le déterminant de s.
Calculer le déterminant de l'endomorphisme qui à une matrice carrée associe sa transposée.

Planche 7

I) Trouver suivant m, les solutions de l'équation différentielle $my'' - (1-m^2)y' + my = x\,\mathrm{e}^x$.

II) Trouver les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé.

Planche 8

I) Montrer que la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$ tend vers 0.
Montrer que $I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$.
Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et en déduire un équivalent de I_n.

II) Montrer que ϕ défini par $\phi(P)(X) = 2(P(X) + P(1-X))$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
Calculer $\phi \circ \phi$ et caractériser ϕ ; calculer les éléments caractéristiques de cette transformation.

III) Cours : sous-espaces en somme directe, supplémentaires.

IV) Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

Filière PTSI

Planche 9

I) Étudier $f(x) = x^2\arctan\left(\frac{1}{1+x}\right)$.

II) Simplifier $x_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cos(k\theta)$.

III) Calculer une primitive de $\frac{1}{\sin x \sin(2x)}$ en faisant la changement de variable $u = \sin x$.

Planche 10
I) Montrer que $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Résoudre $y'' + 6y' + 9y = \frac{\mathrm{e}^{-3x}}{\sqrt{1+x^2}}$.
II) Étudier la courbe d'équation polaire $r\left(\theta\right) = \frac{1}{1+\tan\theta}$.

Planche 11
I) Soit E un K-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E. On pose $B' = (e'_j)_{1\leq j\leq n}$ la famille de vecteurs telle que $e'_j = \sum_{k\neq j} e_k - e_j$. Montrer que B' est une nouvelle base de E. Donner les matrices de passage de B à B' et de B' à B.
II) Soit $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Calculer u_0, u_1 et $u_n + u_{n+2}$. Étudier la suite (u_n).

Planche 12
I) Étude de l'application définie par $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+X}}$. Simplifier $f(x)$.
II) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et p un projecteur de E. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que $f\circ p = p\circ f \Leftrightarrow \ker p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par f.
III) Calculer $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-\mathrm{j}}$, où j est la racine cubique usuelle de l'unité.

Planche 13
I) Soit $f\left(x\right) = \frac{x^2-1}{2x} - x^2 \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$. Montrer que la courbe C de f admet une asymptote et étudier la position de C par rapport à cette asymptote.
II) On note E, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Soit F l'application de E dans E qui, à toute application f de E fait correspondre l'application notée $F(f)$, définie par $F(f)(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$. Montrer que F est un projecteur de E.

Planche 14
I) Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, on pose : $f_n\left(x\right) = x^n - nx + 1$ avec $x \in \mathbb{R}_+$.
1. Montrer que f_n admet deux racines dans $\mathbb{R}_+$, notées a_n et b_n et vérifiant : $0 < a_n < 1 < b_n$.
2. Montrer que la suite (a_n) est monotone et convergente. Trouver sa limite et un équivalent.
3. Montrer que $f_n\left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) \geq n$. En déduire la limite de la suite (b_n).
II) Soient E un espace vectoriel euclidien de base $B = (e_1, e_2, e_3)$ et $a = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i$, un vecteur de E. Donner la matrice, dans la base B, du projecteur orthogonal de E sur $\mathrm{Vec}(a)$.

Planche 15
I) Soit $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, espace vectoriel de dimension n ; pour tout j de $[\![1, n]\!]$, on pose $e'_j = \sum_{i=1}^{n} e_i - e_j$; montrer que $B' = (e'_1, ..., e'_n)$ est une base de E et donner les matrices de passage de B à B' et de B' à B.
II) Soit $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$. Calculer u_0, u_1 et $u_n + u_{n+2}$; étudier la suite (u_n).