Oraux des "Minettes" - session 2002

Filière MPSI

Planche 1
I) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $(1+x)^{2n} = (1-x)^{2n}$. Calculer le produit de toutes les solutions non nulles de (E).
II) Soit f continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.

Planche 2
I) Calculer $\int_0^1 \arctan x \mathrm{d}x$.
II) Dans $\mathbb{R}^4$, soit $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Trouver un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Vect}(u,v)$ et trouver un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(u,v)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Planche 3
I) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b)$ et $f'(a) = 0$. Montrer que $g : x \to \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est prolongeable par continuité en a. En déduire qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$.
II) Résoudre $(z+1)^n - (z-1)^n = 0$. Montrer que les solutions sont des imaginaires purs.

Planche 4
I) Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f(0) = 1$ est continue sur $\mathbb{R}$; est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
II) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (4+3\mathrm{i})z + 5\mathrm{i} = 0$.
III) Étudier la courbe $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = t^2 + \frac{2}{t} \\ y(t) = t + \frac{1}{t} \end{array} \right.$.
IV) $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y - z = 0 \right\}$; $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \\ 3a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$.
Donner la matrice de la projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Planche 5
I) Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^{1+1/x} = \mathrm{e}^{(1+1/x)\ln x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$.
1. Montrer que f est continue et étudier sa dérivabilité en 0.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\ln x \leq x + 1$; calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}_+^*$, étudier son signe et étudier le sens de variations de f.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$; étudier la branche infinie au voisinage de $+\infty$ (on pourra chercher un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$).
II) Trouver les entiers naturels n pour lesquels $(X+1)^n + X^n + 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

Planche 6
I) Calculer $I = \int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t$. Calculer un développement limité à l'ordre 4 de $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ en 0, puis un développement limité à l'ordre 5 de $\int_0^x \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t$.
II) Soit D la droite vectorielle dirigée par $u = i + 2j + 3k$, dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté muni de la base orthonormée directe (i,j,k). Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur D et en déduire celle de la projection orthogonale sur $D^\perp$.

Planche 7
I) Trouver toutes les solutions de l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+\mathrm{i})$.
II) Étudier la suite réelle (u_n) de premier terme $u_0 \geq 0$ et vérifiant $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

Planche 8
I) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, f un endomorphisme de E. On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout $k > 0$, $f^k = f \circ f^{k-1}$, $N_k = \ker(f^k)$, $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$
1. Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}$, $N_k \subset N_{k+1}$ et $I_{k+1} \subset I_k$.
2. Prouver l'existence d'un entier p tel que $\forall k \geq p$, $N_{k+1} = N_k$. Que dire alors de la suite (I_k) ?
3. Montrer que $E = I_p \oplus N_p$.
4. Montrer que f induit par restriction un automorphisme sur I_p.
II) Étudier la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} \mathrm{d}x$.
III) Montrer que si p est un carré et un cube, $\exists c \in \mathbb{N}$ tel que $p = c^6$.

Filière PCSI

Planche 9
Soient $x(t) = 2\cos t - \cos 2t$; $y(t) = 2\sin t - \sin 2t$ et C la courbe dont les points $M(t)$ ont pour coordonnées $(x(t), y(t))$.
1. Montrer que $M(t + \frac{2\pi}{3}) = r(M(t))$ où r est une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
2. Faire un développement limité à l'ordre 2 de x et y en $\frac{\pi}{3}$; en déduire que la tangente à C en $M(\frac{\pi}{3})$ passe par O.
3. Construire C.

Planche 10
I) Soit $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 ; expliquer ce que cela signifie ; montrer qu'il existe deux matrices unicolonnes A et B telles que $S = A\,{}^tB$.
Préciser ${}^tB\ A$; calculer alors S^2, puis S^n en fonction de S.

À quelle condition $I+S$ est-elle inversible ? En déduire, quand elle existe $(I+S)^{-1}$.
II) Calculer $\lim_{x\to 2}(3^x+2^x-12)^{\tan(\pi x/4)}$.

Planche 11
I) Résoudre $y''+6y'+9y=\mathrm{e}^{3x}+2\,\mathrm{e}^{-3x}$.
II) Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin^5 x}\left(x+\frac{2}{3}\sin x-\frac{1}{3}3\tan x\right)$.

Planche 12
I) Trouver a et b tels que $P=aX^{n+1}+bX^n+1$ admette 1 pour racine double. Déterminer alors le quotient de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$.
II) Donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\arcsin x$.
III) Comment carctérise-t-on un espace vectoriel ?

Planche 13
I) Soit $f\in\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, telle que $\forall x\in[a,b],\ f(a+b-x)=f(x)$.
Interpréter géométriquement cette propriété. Exprimer $\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x$ en fonction de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. Application : calculer $\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.
II) Énoncés des théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

Planche 14
I) Calculer $u_n=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$.
Montrer que $S_n=\sum_{k=0}^n u_k$ admet en $+\infty$ une limite que l'on calculera.
II) Soit $E=\mathbb{R}_4[X]$ muni de sa base canonique notée b et $F=\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $(1,X+1,X^2+1)$ est une base de F notée β.
À $P(X)=\sum_{k=0}^4 a_kX^k$ on associe $f(P)=a_0X^2+7a_2X+a_4$.
Donner la matrice de f dans les bases b et β. Déterminer le rang de f, son image, son noyau.

Planche 15
I) Pour $a\in\mathbb{K}$ et $P\in\mathbb{K}[x]$, on pose $f(P)=(X-a)P'$.
1. f est-il un endomorphisme ? Est-il injectif ?
2. Trouver tous les λ tels qu'il existe $P\neq 0$ vérifiant $f(P)=\lambda P$.
3. En déduire les polynômes divisibles par leur dérivée.
II) On considère l'application f dont on connaît le développement limité en 0 : $f(x)=2x-x^3+x^5+o(x^5)$.
1. Est-elle continue en 0 ?
2. Est-elle dérivable en 0 ?
3. Peut-on déterminer la tangente en 0 ?

Planche 16
I) $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&2\\-2&2&1\\-1&-2&2\end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ? Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A. f est-il une rotation ? Déterminer une base où la matrice de f est plus simple.
II) Justifier l'existence de $u_n=\int_0^1\frac{t^n\ln t}{1+t}dt$ et étudier la monotonie de la suite (u_n). Calculer sa limite. Calculer u_n+u_{n+1}.

Planche 17
I) Ensemble de définition de $f:x\to\int_x^{2x}\frac{t^2}{t^2+\sin^2 t}\mathrm{d}t$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, qu'elle est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
Montrer que la droite $y=x$ est asymptote à la courbe de f.
Il) Soit C la courbe définie par $x(t)=\frac{3}{t(t-1)}$ et $y(t)=\frac{t^2-2}{t}$.
Étudier le comportement en 0^+.

Planche 18
I) Soit $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est A.
1. Comparer f et f^2.
2. Reconnaître f et préciser ses éléments caractéristiques.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
4. Que peut-on dire de l'application $g=\mathrm{Id}-2f$?
II) Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
1. Si $(|u_n|)$ converge, alors (u_n) converge.
2. Si (u_n) converge vers $\ell>0$, alors $(1/u_n)$ converge vers $1/\ell$.
3. Si (u_{n^2}) converge vers $\ell>0$, alors (u_n^2) converge vers ℓ.
4. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$.

Planche 19
I) Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y'+2xy=\frac{1}{x}$.
II) Montrer que pour tout $x\in\ ]0,1[$, $\arcsin x<\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
III) Soit $F:x\mapsto\int_x^{x^2+1}\frac{1}{t\ln t}dt$ pour $x>1$.
1. Montrer que F est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et calculer F'.
2. En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Planche 20
I) Soit f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que pour tout (x,y), $f(x+y)=\mathrm{e}^x f(y)+\mathrm{e}^y f(x)$. Calculer $f(0)$. Montrer que f est dérivable et qu'elle est solution d'une équation différentielle. Conclure.
II) Soit C la courbe définie par $x(t)=(1+t)\,\mathrm{e}^t$ et $y(t)=t^2\,\mathrm{e}^t$. Étudier le comportement en -2.