Oraux des "Minettes" - session 2000

Planche 1
I) Trouver tous les triplets de nombres complexes (a, b, c) tels que $abc = a + b + c = 1$.
II) Soit (C) le cercle d'équation $x^2 - 2x + y^2 - 6y + 9 = 0$ dans le plan xOy et (P) le plan d'équation $x + z = 4$. Trouver les sphères tangentes à (P) contenant (C).

Planche 2
I) Calculer $I = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}$ où
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |x| \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.
II) Soient $\mathbb{E}$ un $\mathbb{R}$-espace de dimension n, $B = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, u l'endomorphisme de E défini par $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = e_i + \sum_{k=1}^{n} e_k$. Déterminer la matrice A de u dans la base B. Calculer A^n.

Planche 3
I) Pour tout $n > 2$, on pose $\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$. Soit Ω la matrice carrée d'ordre n de coefficient $\omega_{pq} = \omega^{(p-1)(q-1)}$ et $\bar{\Omega}$ sa matrice conjuguée. Calculer $\Omega\bar{\Omega}$ puis Ω^2. Montrer que Ω est inversible.
II) Cours : définir une matrice de passage.

Planche 4
Soit a un nombre complexe.
1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} a^k$.
2. Montrer que $P(X) = \frac{X^{2n}-1}{X^2-1}$ est un polynôme. Calculer ses racines. Le développer, puis le factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)$.
4. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(k\frac{\pi}{n}\right)$ avec une autre méthode.

Planche 5
I) Soit f l'endomorphisme de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer en les déterminant qu'il existe une droite vectorielle et un plan vectoriel (P) uniques, stables par f. Déterminer une base orthonormale de (P).
II) Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$, $P(X) = X^{2n} - 2\cos\alpha X^n + 1$.

Planche 6
I) Soit $J(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos\theta\cos x}$.
1. Montrer que J est défini si et seulement si x n'est pas un multiple de π.
2. Calculer $J(x)$.
II) Soit A une matrice carrée d'ordre 2 telle que $A^2 = 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(A + I_2)^n = I_2 + nA$. Calculer B^n avec $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Planche 7
Soit A une matrice carrée d'ordre n de coefficient $a_{ij} = \frac{i}{j}$; représenter A, déterminer A^2, le rang et le noyau de A.

Planche 8
I) Soit f définie sur $\mathbb{C}^*$ par $f(z) = z - \frac{1}{z}$.
1. Montrer que f est surjective mais non injective.
2. Déterminer l'image de U, ensemble des complexes de module 1, par f.
3. Déterminer l'image réciproque par f de l'ensemble J des imaginaires purs.
II) Montrer que la suite définie par $u_{n+1} = \frac{\exp(-u_n)}{n+1}$.

Planche 9
I) Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^n \sum_{k=0}^{n} |x - k|\,\mathrm{d}x$.
II) Soit $\Phi : \left|\begin{array}{c} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto Q \end{array}\right.$ où
$Q(X) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$. Montrer que Φ est linéaire. Écrire la matrice de Φ dans la base canonique. Déterminer son noyau et son image.

Planche 10
I) Étude aux bornes de son domaine de définition de $f(x) = (x-1)^2 \frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$.
II) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & m \\ m & m & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer une base et la dimension de l'image et du noyau de f. Donnez la condition pour que le noyau et l'image de f soient supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Planche 11
I) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2[X])$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}^2[X]$, $f(P) = P(1 - X)$. Montrer que f est une symétrie et en préciser les éléments caractéristiques.
II) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\mathrm{d}x$.
1. Calculer I_0 et I_1.
2. Donner une relation entre I_n et I_{n+1}. En déduire I_2.

Planche 12
I) 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\ker f = \operatorname{Im} f$ si et seulement si $f \neq 0$, $f^2 = 0$, n pair et $\operatorname{rg} f = n/2$.
2. Dans le cas où $\ker f = \operatorname{Im} f$ et $n = 2$, soit $x \notin \ker f$. Montrer que $(x, f(x))$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

II) Soit $P = X^3 + 2X - \pi$. On note a, b, c ses racines dans $\mathbb{C}$. Calculer
1. $\tau_0 = a + b + c$;
2. $\tau_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$;
3. $\tau_2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Planche 13
I) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = n(\sqrt[n]{3} - 1)$. Déterminer la limite ℓ de (u_n), et en donner un équivalent de $u_n - \ell$.
II) Soit E un K-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -f$.
1. Montrer que $\ker(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, f$.
2. On suppose E de dimension finie. Montrer que $E = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\,(f + \mathrm{Id})$.

Planche 14
Pour $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$A(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

et $G = \{A(\theta, \varphi) \mid (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que $(G, \times)$ est un groupe.

Planche 15
I) 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \left(1 - \sqrt{2}\right)^n$ est un entier. Quelle est sa parité ?
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sin(\pi(1+\sqrt{2})^n)$. Déterminer la limite de (u_n), et en déterminer un équivalent.
II) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}\, A + \mathrm{rg}\, B \leq n$.

Planche 16
Soit $\Delta : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X). \end{array} \right.$
1. Δ est-elle linéaire ? Déterminer $\ker \Delta$.
2. La restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle injective? surjective?
3. Déterminer $\deg \Delta(P)$ en fonction de $\deg(P)$.
4. Déterminer P tel que $\Delta(P) = X^3$.
En déduire $\sum_{k=1}^{n} k^3$.
5. Montrer que $\Delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P(X+k)$.

Planche 17
I) Résoudre $(1 - x^2)y' + xy = 1$.
II) Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure affine euclidienne canonique, on pose $M = (0, -2, -2)$ et on note $\mathcal{D}$ la droite affine passant par $A = (0, 1, 1)$ et dirigée par $v = (1, 1, 1)$. Calculer la distance d de M à $\mathcal{D}$.

Planche 18
I) En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$0 \leq \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} \leq \frac{x^3}{16}.$$

II) Soit $P = X^2 - 4X + 5$ et $Q = X^3 - (\mathrm{i}+1)X^2 - 3X + 3 - \mathrm{i}$. Déterminer les racines communes aux polynômes P et Q. Donner le ppcm de P et Q.

Planche 19
I) Pour $n \geq 3$, on pose $g_n : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n + nx - 1. \end{array} \right.$
1. Montrer qu'il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $g_n(u_n) = 0$.
2. Étudier la convergence de la suite (u_n).
3. Donner un équivalent de u_n.
II) Étudier la suite (u_n) définie par $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \mathrm{d}x$.

Planche 20
I) 1. Soit $a = 4\sqrt{2}(-1 + \mathrm{i})$. Donner a sous forme trigonométrique.
2. Résoudre l'équation $z^3 = a$, donner les solutions sous forme trigonométrique également.
3. Calculer $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.
II) Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$.
