CONCOURS COMMUN 1999
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve Spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

Jeudi 27 mai 1999 de 8h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette correspondant à cette épreuve.

Aucun document n'est autorisé

PREMIER PROBLÈME

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Si P est un polynôme on notera P' son polynôme dérivé.
Si P est un polynôme on notera également P sa fonction polynôme associée.

I. Etudes d'endomorphismes donnés par leur matrice

1. Soit u et v deux réels. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ ayant pour matrice sur la base canonique $(1, X, X^2)$ la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}.$$

1a. Calculer le déterminant de f en justifiant votre réponse.

1b. Déterminer une base du noyau de f.

1c. Déterminer une base de l'image de f.

2. Soit w un réel. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ ayant pour matrice sur la base canonique $(1,\ X,\ X^2,\ X^3)$ la matrice B suivante :

$$B=\begin{pmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2a. Calculer le déterminant de g en justifiant votre réponse.
On notera w_0 la valeur qui annule ce déterminant.

2b. Déterminer lorsque $w = w_0$ une base du noyau de g.

II. Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, Q un polynôme de degré 2 et φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par : $\varphi(P) = 2P'Q - nPQ'$.

A Etude de cas particuliers

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit u et v deux réels. On suppose dans cette question que $n=2$ et que : $Q = X^2 + uX + v$.

2a. Déterminer la matrice de φ sur la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

2b. Déterminer le noyau de φ en fonction de Q.

3. Soit w un réel. On suppose dans cette question que $n = 3$ et que : $Q = X^2 + 2X + w$.

3a. Déterminer la matrice de φ sur la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

3b. Déterminer suivant les valeurs de w le noyau de φ.

B Etude du cas général

1. On suppose que Q n'admet pas de racine double.

1a. Que peut-on dire du PGCD de Q et de Q' ?

1b. Déduire de la question précédente que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors Q divise P.

1c. Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ, il existe un entier k non nul et un polynôme R non nul, tels que $P = RQ^k$ et tels que Q ne divise pas R.

1d. Déduire de la question précédente que si le noyau de φ n'est pas réduit au polynôme nul alors n est pair.

1e. Déterminer suivant les valeurs de n le noyau de φ.

2. On suppose que Q possède une racine double α.

2a. Montrer que si P est un polynôme non nul appartenant au noyau de φ alors α est racine de P.

2b. Donner le noyau de φ.
(On pourra utiliser l'ordre de multiplicité de la racine α).

3. Dans cette question, on supposera n **impair**.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{R}_n[X]$ unique tel que : $P = (X^2+1)R' - nXR$
Justifier que l'application ψ : $P \mapsto R$ ainsi définie est linéaire.

DEUXIÈME PROBLÈME

I. Soit la fonction φ définie par : $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de φ.

2. Montrer que φ est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.

3. Etudier le signe de $\varphi'(x)$.

4. Déterminer les limites de φ aux bornes de son ensemble de définition.

5. Montrer que φ peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction que l'on notera également φ. Montrer que cette fonction ainsi prolongée est de classe C^1 sur son ensemble de définition.

6. Déterminer le tableau de variations de φ et tracer sa courbe représentative.

II. Soit f une fonction définie continue et **positive** sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Soit la fonction g définie par : $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin t}dt$.

1. Montrer que g est définie sur $]-1,+\infty[$.

2. On suppose dans cette question que : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) = \cos\, t$. Calculer $g(x)$.

3. On suppose dans cette question que : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) = \sin(2t)$. Calculer $g(x)$.

4. Soit a un réel supérieur strictement à -1. Montrer qu'on peut trouver un réel K tel que : $\forall\, (x, y) \in\,]a, +\infty[^2$, $|g(x) - g(y)| \leq K\,|x-y|$. En déduire que la fonction g est continue sur $]-1, +\infty[$.

5. Montrer, sans utiliser la dérivabilité, que g est décroissante sur $]-1, +\infty[$.

6a. Montrer que la fonction f est majorée sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

6b. Soit M un majorant de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $b \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

Montrer que : $\forall x > 0$, $g(x) \leq Mb + \frac{M\pi}{2(1+x\sin b)}$.

6c. En déduire la limite de la fonction g en $+\infty$.

7. La fonction $t \mapsto \frac{\cos\, t}{1-\sin t}$ est-elle intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$?

8a. Montrer que g admet une limite L finie ou infinie en -1.

8b. On admettra que si la fonction $t \to \frac{f(t)}{1-\sin t}$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ alors $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1-\sin t}dt$ et sinon $L = +\infty$. Retrouver le résultat de la question 7.

9. Donner le tableau de variations de g.