CONCOURS COMMUN 1999
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)

Mercredi 26 mai 1999 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4, 4/4.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
Les candidats colleront sur leur première feuille de composition l'étiquette correspondant à cette épreuve.

Aucun document n'est autorisé

Problème 1

Partie I

Soit ℓ un réel. On note f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = \ell$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{I}_n$ l'intervalle $[n\pi, (n+1)\pi]$.

1. – Quelle valeur faut-il donner à ℓ pour que f soit continue à droite en 0 ?

On suppose désormais que ℓ a cette valeur.

2. – Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est-à-dire : dérivable, et à dérivée continue) sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et explicitez la dérivée de f à droite en 0.

3. – Soit $n \geqslant 1$. Montrez que, dans l'intervalle $\mathcal{I}_n$, l'équation $x \cos x = \sin x$ possède une et une seule solution, que l'on notera x_n.

4. – Déterminez un équivalent *très simple* de x_n, lorsque n tend vers l'infini.

5. – Décrivez rapidement les variations de f dans l'intervalle $\mathcal{I}_0$, puis dans les intervalles $\mathcal{I}_{2n-1}$ et $\mathcal{I}_{2n}$ pour $n \geqslant 1$.

6. – Déterminez l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II

7. – Justifier l'existence de l'application F définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = F((n+1)\pi) - F(n\pi) = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\,dt$.

8. – Quel est le signe de u_n ?

9. – Montrez que la suite de terme général $|u_n|$ est décroissante et converge vers 0.

10. – Que pouvez-vous dire des suites de termes généraux respectifs $F(2n\pi)$ et $F((2n+1)\pi)$?

11. – Montrez que la suite de terme général $F(n\pi)$ converge vers une limite μ (que l'on ne cherchera pas à déterminer).

12. – Justifiez l'encadrement $0 \leqslant \mu \leqslant \pi$.

13. – Préciser la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, si toutefois cette limite existe.

On peut établir la formule $\mu = \frac{\pi}{2}$, mais c'est une autre histoire.

Partie III

Il est clair que la restriction g de f à l'intervalle $]0, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle ; on pourrait d'ailleurs prouver que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$ mais ce n'est pas notre objectif. On se propose simplement d'établir quelques résultats concernant la dérivée n-ième de g, notée $g^{(n)}$. En particulier, $g^{(0)}$ désigne g elle-même. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée. Chaque polynôme sera écrit selon les puissances décroissantes de X.

14. – Explicitez $g''(x)$ pour $x > 0$.

Au vu des expressions de $g(x)$, $g'(x)$ et $g''(x)$, on se propose d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

> Il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que, pour tout $x > 0$:
>
> $$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)} x + Q_n(x)\sin^{(n+1)} x}{x^{n+1}}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n.

15. – Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0,1,2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant les expressions de P_n et Q_n pour ces valeurs de n. Voyez-vous apparaître une relation *simple* entre P_n et Q_n ?

16. – On fixe $n \in \mathbb{N}$, et on suppose l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez des expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

Il résulte donc des questions **15** et **16** que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

17. – Montrez que P_n et Q_n ont tous leurs coefficients dans $\mathbb{Z}$; précisez le degré, la parité, et le coefficient dominant de ces polynômes.

18. – Utilisez les formules établies à la question **16** pour expliciter P_3 et Q_3.

19. – Deux polynômes U et V vérifient $U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0$ pour tout $x > 0$. Montrez que U et V sont tous deux égaux au polynôme nul.

20. – En partant de la relation $xg(x) = \sin x$ et en appliquant la formule de Leibniz, ainsi que le résultat de la question précédente, mettez en évidence deux nouvelles relations liant P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1}.

21. – Justifiez alors la relation $P_n' = Q_n$, et montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre *très simple*, que l'on notera $\mathcal{E}_n$.

22. – Il est clair que l'application $\Phi : T \mapsto T + T''$ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Montrez que Φ induit un automorphisme Φ_n du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ constitué des polynômes de degré n au plus ; montrez ensuite que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Il résulte de ceci que P_n est l'unique solution polynomiale de l'équation différentielle $\mathcal{E}_n$.

23. – $n \in \mathbb{N}$ est fixé, et p désigne la partie entière de $n/2$. Justifiez l'existence d'une famille $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant p}$ de réels vérifiant $P_n = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant p} a_k X^{n-2k}$ et déterminez une expression de a_k faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarrassée de tout signe $\prod$.

24. – Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminez les solutions réelles de l'équation différentielle $y''+y = x^n$.

Problème 2

On note $p : x \mapsto e^x = \exp(x)$, $q : x \mapsto e^{2x} = \exp(2x)$ et $r : x \mapsto e^{x^2} = \exp(x^2)$. On note $\mathcal{B} = (p,q,r)$ et $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par la famille $\mathcal{B}$.

La partie IV est indépendante des autres parties.

Partie I

On se propose de prouver que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{E}$, au moyen de diverses méthodes. De par la définition de $\mathcal{E}$, il nous suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre ; soit donc a, b et c trois réels tels que $ap + bq + cr = 0$ (où 0 désigne la fonction nulle).

1. – L'étudiant Antoine a évalué l'expression $(ap + bq + cr)(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$. Suivez sa démarche en l'expliquant, et concluez.

2. – Antoine a utilisé une propriété du nombre e ; laquelle ? Sauriez-vous justifier cette propriété autrement que par un argument du genre « *tout le monde sait bien que* $e \approx 2.71828$ » ?

3. – L'étudiant Nicolas a observé le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de 0, de l'application $ap + bq + cr$. Faites comme lui et concluez.

4. – L'étudiant Luc a eu une autre idée : il s'est intéressé au comportement de chacune des trois fonctions p, q, r au voisinage de $+\infty$. Reconstituez sa méthode et concluez.

5. – Au fait : quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

On note ψ l'application qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe le triplet de réels $\big(f(0), f'(0), f(1)\big)$.

6. – Prouvez que ψ est un isomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

7. – Soit $f = ap + bq + cr$ un élément de $\mathcal{E}$. Exprimez a, b et c en fonction de $f(0)$, $f'(0)$ et $f(1)$.

Partie II

On note φ l'application de $\mathcal{E}$ dans lui-même qui, à $f \in \mathcal{E}$, associe $\varphi(f) = Ap + Bq + Cr$ où

$$\begin{cases} A = \dfrac{2}{e-1}f(0) + f'(0) + \dfrac{2}{e(e-1)}f(1) \\ B = -\dfrac{1}{e-1}f(0) - \dfrac{1}{e(e-1)}f(1) \\ C = \dfrac{e-2}{e-1}f(0) - f'(0) - \dfrac{1}{e(e-1)}f(1) \end{cases}$$

8. – On note θ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $\theta(a, b, c) = (a, b, -c)$. Montrez que $\varphi = \psi^{-1} \circ \theta \circ \psi$. En déduire que φ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$.

9. – Exprimez $\varphi(p)$, $\varphi(q)$ et $\varphi(r)$ en fonction de p, q et r.

10. – Écrivez la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$.

11. – Déterminez $\varphi \circ \varphi$ et M^2. Que pouvez-vous dire de φ ?

Partie III

12. – On note $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ invariants par f. Montrez que $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{E} : f(1) = 0\}$. En déduire que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$; déterminez une équation de $\mathcal{P}$ dans la base $\mathcal{B}$; prouvez que $\mathcal{P}$ est de dimension deux ; exhibez une base (e_1, e_2) de $\mathcal{P}$.

13. – On note $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{E} : \varphi(f) = -f\}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ transformés en leur opposé par f. Montrez que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$; prouvez que $\mathcal{D}$ est de dimension un, et déterminez des équations de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$. Exhibez une base (e_3) de $\mathcal{D}$, et donnez une caractérisation des éléments de $\mathcal{D}$.

14. – Montrez que $\mathcal{E} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D}$.

15. – Justifiez l'affirmation suivante : $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathcal{E}$.

16. – Quelle est la matrice de φ dans la base $\mathcal{C}$? Caractérisez géométriquement φ.

Partie IV

On se propose de développer ici l'idée suivie par l'étudiant Luc dans la première partie (question 4). On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont le terme constant est nul ; pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n. On identifie un polynôme P et la fonction polynôme $x \mapsto P(x)$ qui lui est naturellement associée.

17. – Montrez que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Quelle est la dimension de $\mathcal{F} \cap \mathbb{R}_n[X]$?

18. – Soit $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$ vérifiant la condition suivante :

$$\text{pour } 1 \leqslant k < q,\ P_{k+1}(x) - P_k(x) \text{ tend vers } +\infty \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty$$

On note $f_k = \exp \circ P_k$ l'application qui, à $x \in \mathbb{R}$, associe $f_k(x) = e^{P_k(x)} = \exp\big(P_k(x)\big)$. Montrez que la famille $(f_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ est libre.

FIN