

# CONCOURS COMMUN 1998

## DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

---

### Épreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

Mercredi 20 mai 1998 de 08h00 à 12h00

#### Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

### PREMIER PROBLÈME

$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.

On considère  $n$  et  $p$  deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

On notera  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels,  $GL_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et  $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices diagonales de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire la matrice diagonale d'ordre  $n$  dont les termes diagonaux sont tous égaux à 1.

Le but de ce problème est l'étude des ensembles

$$\mathcal{R}_n(p) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^p = I_n\}.$$

Dans la deuxième et la troisième partie,  $E$  désigne un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2 muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ , et  $Id_E$  désigne l'identité de  $E$ .

#### I. Généralités

- 1)  $\mathcal{R}_n(p)$  est-il un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?
- 2) Soit  $A \in \mathcal{R}_n(p)$ . Montrer que  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  et que  $A^{-1} \in \mathcal{R}_n(p)$ .
- 3) Soit  $A \in \mathcal{R}_n(p)$  et  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $P^{-1}AP \in \mathcal{R}_n(p)$ .
- 4) Montrer que  $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{D}_n(\mathbb{R})$  est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.
- 5) On considère  $q$  un entier naturel supérieur ou égal à 2, et on appelle  $d$  le plus grand diviseur commun de  $p$  et  $q$ . Montrer que  $\mathcal{R}_n(p) \cap \mathcal{R}_n(q) = \mathcal{R}_n(d)$ .

#### II. Etude de $\mathcal{R}_2(2)$

- 1) Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{R}_2(2)$  tel que  $A \neq I_2$  et  $A \neq -I_2$ , et soit  $u$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A$ .
  - a) Montrer que  $\text{Ker}(u - Id_E) \oplus \text{Ker}(u + Id_E) = E$ .
  - b) En déduire qu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Montrer qu'il existe quatre réels  $a, b, c$  et  $d$  tels que  $ad - bc \neq 0$  et

$$A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad + bc & -2ab \\ 2cd & -ad - bc \end{pmatrix}.$$

2) Montrer que  $\mathcal{R}_2(2)$  muni de la multiplication des matrices n'est pas un groupe. Interpréter géométriquement ce résultat.

### III. Etude de $\mathcal{R}_2(3)$

Dans toute la suite du problème,  $M$  désigne un élément de  $\mathcal{R}_2(3)$ , et  $v$  l'endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $\mathcal{B}$  est  $M$ . On considère les sous-espaces vectoriels de  $E$  :

$$F = \text{Ker}(v - Id_E) \quad \text{et} \quad G = \text{Ker}(v^2 + v + Id_E)$$

où  $v^2 = v \circ v$ .

- 1) a) Montrer que  $F \cap G = \{0\}$ .  
 b) Soit  $x \in E$ . Montrer que  $\frac{1}{3}(x + v(x) + v^2(x)) \in F$  et que  $\frac{1}{3}(2x - v(x) - v^2(x)) \in G$ .  
 c) En déduire que  $E = F \oplus G$ .
- 2) Que peut-on dire de  $M$  si  $F$  est de dimension 2 ?
- 3) Le but de cette question est de montrer à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que  $F$  n'est pas de dimension 1. On suppose donc que  $F$  est de dimension 1.
  - a) Montrer qu'il existe une base  $\mathcal{G} = (g_1, g_2)$  de  $E$  telle que  $F$  soit la droite vectorielle engendrée par  $g_1$  et  $G$  soit la droite vectorielle engendrée par  $g_2$ .
  - b) En considérant le vecteur  $v^2(g_2) + v(g_2) + g_2$ , obtenir une contradiction.
- 4) On suppose dans cette question que  $F$  est de dimension 0.
  - a) Montrer que  $(e_1, v(e_1))$  est une base de  $E$ .
  - b) En déduire qu'il existe un réel  $a$  et un réel non nul  $b$  tels que

$$M = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} ab & -1 - a - a^2 \\ b^2 & -ab - b \end{pmatrix}.$$

## DEUXIÈME PROBLÈME

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $t + \sin t = 0$ .
- 2) Pour tout réel  $t$  tel que  $t + \sin t \neq 0$ , on pose :

$$\psi(t) = \frac{1}{t + \sin t}.$$

Montrer que l'intégrale  $\int_x^{2x} \psi(t) dt$  est définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

On notera  $f(x)$  sa valeur.

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction  $f$  associée, définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

- 3) Soit  $x_0 > 0$ . La fonction  $\psi$  est-elle intégrable sur  $]0, x_0]$  ?

- 4) Etudier la parité de  $f$ .
- 5) Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ , et calculer  $f'(x)$  sous forme factorisée pour  $x > 0$ .
- 6) En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- 7) On cherche à étudier le comportement de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .
  - a) Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,

$$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t + \sin t)}.$$

- b) Montrer qu'il existe  $m > 0$  tel que, pour tout  $t \geq m$ , on ait :  $t + \sin t \geq \frac{t}{2}$ .
  - c) En déduire que  $f(x)$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- 8) On cherche à étudier le comportement de  $f$  au voisinage de 0.
  - a) Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\frac{1}{t + \sin t} = \frac{a}{t} + bt + o(t)$$

au voisinage de 0.

- b) Soit  $g$  une fonction de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = 0$ . Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sup_{t \in [x, 2x]} |g(t)| = 0.$$

- c) En déduire que si  $h$  est une fonction continue de  $]0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $h(x) = o(x)$  au voisinage de 0, alors  $\int_x^{2x} h(t) dt = o(x^2)$  au voisinage de 0.
  - d) Montrer que  $f$  admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre 2 que l'on déterminera.
  - e) Montrer que  $f$  peut se prolonger en 0 en une fonction dérivable (on notera encore  $f$  ce prolongement), et déterminer  $f(0)$  et  $f'(0)$ .
  - f) Quelle est, au voisinage de 0, la position de la courbe représentative de  $f$  par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0 ?
  - g) Déterminer un équivalent simple de  $f'(x)$  au voisinage de 0.
  - h) En déduire que  $f$  est deux fois dérivable en 0, et calculer  $f''(0)$ .
- 9) Déterminer le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .