

CONCOURS COMMUN 1998

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

PREMIER PROBLÈME

I – Solutions d'une équation différentielle

Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère l'équation différentielle $(E) : (1 + x^2) y' + 2xy = \frac{1}{x}$.

1) Résoudre (E) sur \mathbb{R}_+^* .

2) Pour tout réel λ , on définit la fonction f_λ sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall x > 0 \quad f_\lambda(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + x^2}$ et on note (C_λ) sa courbe représentative dans (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Soit $M(\alpha, \beta)$ un point du plan avec $\alpha > 0$. Montrer que par M passe une et une seule courbe (C_λ) .

b) Montrer que pour tout réel λ , la fonction f_λ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

c) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'_\lambda(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$.

d) Étudier les variations de g_λ . On montrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur \mathbb{R}_+^* ; cette solution sera notée m_λ .

e) Dresser le tableau de variations de f_λ . On calculera les limites de f_λ en 0 et $+\infty$, et on montrera que $f_\lambda(m_\lambda) = \frac{1}{2m_\lambda^2}$.

f) Représenter sur un même graphique les courbes (C_{-1}) , (C_0) et (C_1) . On donnera des valeurs approchées de m_{-1} et m_0 à 10^{-2} près en précisant la méthode utilisée, ainsi que la valeur exacte de m_1 .

3) Dans cette question, on cherche un équivalent de m_λ lorsque λ tend vers $+\infty$.

a) Montrer que pour λ assez grand, on a : $\frac{1}{\lambda} \leq m_\lambda \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$.

b) En déduire, à l'aide des questions précédentes, que $m_\lambda \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

II – Étude d'une fonction intégrale

On étudie dans cette partie la fonction F définie par : $\forall x > 0 \quad F(x) = \int_1^x f_0(t) dt = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

La courbe représentative de F sera notée Γ .

1) a) Déterminer le signe de F sur \mathbb{R}_+^* .

b) Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur \mathbb{R}_+^* .

c) Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.

d) Écrire le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.

2) Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.

- 3) a) Soit φ la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $\forall x > 0 \quad \varphi(x) = \frac{\text{Arctan } x}{x}$.
Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.
- b) Montrer que : $\forall x > 0 \quad F(x) = \text{Arctan } x \ln x - \int_1^x \varphi(t) dt$.
- c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. La nouvelle fonction ainsi obtenue sera encore notée F .
Que peut-on dire de F au voisinage de $+\infty$?
- d) Montrer que F n'est pas dérivable à droite en 0. Que peut-on dire de Γ au point d'abscisse 0 ?
- 4) Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.
- a) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln t dt$.
- b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x > 0 \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$.
- c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0, 1[$, une majoration de $\left| F(x) - \sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x) \right|$.
- d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |F(0) - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$.
- e) Donner, en détaillant la méthode utilisée, une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$.
- 5) Tracer l'allure de la courbe Γ . On précisera le point d'inflexion.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 est muni de sa structure euclidienne orientée usuelle et rapporté à sa base canonique (orthonormée directe) notée (e_1, e_2, e_3) .

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la \mathbb{R} -algèbre des endomorphismes de \mathbb{R}^3 , $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la \mathbb{R} -algèbre des matrices d'ordre 3 à coefficients réels et I_3 la matrice identité.

Il est demandé de faire figurer tous les calculs sur la copie.

Partie I

Soit s l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $S = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

- 1) Montrer que s est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .
- 2) Soient $e'_1 = (1, 1, 1)$, $e'_2 = (1, -1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, -2)$.
 - a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de \mathbb{R}^3 .
 - b) Déterminer la matrice S' de s dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) .
 - c) Calculer $(S')^n$ et donner une méthode de calcul de S^n (on ne demande pas d'effectuer lesdits calculs).

- 3) a) La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
- b) Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de I_3 et S .
- c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n = a_n I_3 + b_n S$ (on convient que : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \quad M^0 = I_3$).
- d) Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1 , et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .
- e) Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
- f) En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4) Soit $B = S - 2I_3$.
- a) Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
- b) En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathbb{N}$ (on pourra, après justification, utiliser la formule du binôme de Newton).
- c) Comparer avec le résultat de la question 3).
- 5) L'expression de S^n obtenue aux questions 3) et 4) est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

Partie II

Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On pose : $u = f \circ s^{-1}$ et on note U la matrice de u dans la base canonique.

- 1) Calculer U ; vérifier que u est une rotation vectorielle et que $u \circ s = s \circ u = f$.
- 2) Soit (e''_1, e''_2, e''_3) la famille obtenue en normant les vecteurs e'_1, e'_2 et e'_3 de la question 2) de la première partie.
- a) Montrer que (e''_1, e''_2, e''_3) est une base orthonormale directe.
- b) Ecrire la matrice U' de u dans cette base et caractériser géométriquement u .
- 3) a) Exprimer la matrice de s dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) en fonction de S' .
- b) En déduire la matrice de f dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) .
- 4) a) Quel est l'ensemble des vecteurs invariants par f ?
- b) Soit $P = \text{Vect}(e''_2, e''_3)$.
- i) Montrer que $f(P) = P$.
- ii) Soit g l'endomorphisme de P tel que pour tout x de P , $g(x) = f(x)$. Montrer que g est la composée de deux applications linéaires simples que l'on reconnaîtra.
- 5) On note $\mathcal{C}(f)$ l'ensemble des endomorphismes de \mathbb{R}^3 commutant avec f , c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes g tels que $f \circ g = g \circ f$.
- a) Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.
- b) Soit $g \in \mathcal{C}(f)$.
- i) Montrer que le vecteur $g(e''_1)$ est invariant par f . Que peut-on en déduire?
- ii) Soit M la matrice de g dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) . Montrer que M commute avec $(S')^3$.
- iii) En déduire la forme générale de la matrice d'un endomorphisme de $\mathcal{C}(f)$ dans la base (e''_1, e''_2, e''_3) .
- c) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(f)$?