Épreuve de Mathématiques

Classements :

SUP (TSI)
SPÉ (TSI)

Mercredi 21 mai 1997 de 14h00 à 18h00

Instructions particulières :

Les candidats doivent traiter les problèmes 1 et 2 qui sont indépendants.

PROBLÈME 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n la fonction suivante :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n+k}}{n+k} \end{cases}$$

Partie A : étude de la suite $(U_n) = (f_n(1))$.

1. Montrer que (U_n) est croissante et majorée ; que peut-on en déduire ?

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

3. En déduire que $\lim\limits_{n \to \infty} U_n = \ln 2$.

Partie B : étude des variations de f_n.

1. Montrer que $f'_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x^n(1-x^n)}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \\ n & \text{si } x = 1 \end{cases}$

2. Montrer que, si n est un entier pair, on a :

$$f'_n(x) = x^n (1+x)(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{n-2})$$

3. En déduire les variations de f_n et le nombre de solutions de $f_n(x) = 0$ (on distinguera deux cas : n pair, puis n impair).

Partie C : étude de la suite $(f_n(x))$, où x est un élément fixé de $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que, pour $0 \leq x \leq 1$, on a $x^n \leq f'_n(x) \leq n x^n$.

2. Montrer que, pour $x > 1$, on a $nx^n \leq f'_n(x)$.

3. En remarquant que $f_n(x) = \int_0^x f'_n(t)\, dt$, trouver, suivant les valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$, la limite de $f_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie D : étude de $S_n(x) = \sum_{p=1}^{n} f_p(x)$ pour $x \in [0,1[$.

1. Vérifier que $S'_n(x) = \dfrac{x(1-x^n)(1-x^{n+1})}{(1-x)^2(1+x)}$.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{t^n}{(1-t)^2(1+t)}\, dt = 0.$

3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(x)$.

4. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2(1+t)}\, dt$ et conclure.

PROBLÈME 2

Notations :

. n désigne un entier naturel non nul et E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

· θ est la fonction nulle de E.

· Pour $f \in E\setminus\{\theta\}$, on note deg(f) le degré de f.

· Soient e_0, e_p et φ les applications définies par :

$$e_0 : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 \end{cases} \qquad e_p : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^p \end{cases} (p \in \mathbb{N}^*)$$

$$\varphi : \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto g \end{cases} \quad \text{telle que : } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\,dt$$

. $E_n = \{ f \in E \,/\, \deg(f) \leq n \} \cup \{ \theta \}$

$I_n = \{ f \in E_n \,/\, f \text{ impaire} \}$, $P_n = \{ f \in E_n \,/\, f \text{ paire} \}$.

Partie A

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, calculer $\varphi(e_p)$; en déduire que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $E_n = I_n \oplus P_n$.
3. Pour $f \in I_n$, calculer $\varphi(f)$; φ est-elle injective ?
4. Pour $f \in P_n$, montrer que $\varphi(f)$ est impaire ; a-t-on $\varphi(f) \in I_n$?

Partie B

Dans cette partie, on suppose que n est impair, c'est-à-dire $n = 2m + 1$ avec m entier naturel.

1. Vérifier que $B_n = \{e_0, e_1, ..., e_n\}$ est une base de E_n.
2. Trouver la dimension de I_n et celle de P_n.
3. Montrer que, pour tout entier p compris entre 0 et n, on a : $\varphi(e_p) \in E_n$; en déduire que $\varphi(E_n) \subset E_n$.
4. Dans cette question $n = 3$.
   a) Écrire la matrice M de la restriction de φ à E_3 dans la base B_3.
   b) Trouver le rang et le noyau de la restriction de φ à E_3.
   c) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer M^p.

Partie C

Dans cette partie, pour g élément donné de E, on cherche f de E vérifiant l'équation $\varphi(f) = g$.

1. Montrer que, si f est un élément de E, $\varphi(f)$ est impaire ; en déduire, si g n'est pas impaire, l'ensemble solution de $\varphi(f) = g$.
2. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, résoudre $\varphi(f) = e_{2p+1}$.
3. Déduire de ce qui précède les solutions de $\varphi(f) = g$.