SUP (MPSI, PCSI, PTSI)
SPÉ (MP, PC, PT, PSI)

Jeudi 22 Mai 1997 de 8h00 à 12h00

PREMIER PROBLÈME

Dans tout ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4, et soit $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.

On considère les vecteurs :
$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2 - e_3 + e_4 \\ f_2 &= e_1 + e_3 \\ f_3 &= -e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \\ f_4 &= e_2 - e_4. \end{aligned}$$

Soit s l'endomorphisme de E ayant pour matrice dans la base B :

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que s est la symétrie par rapport au plan F de base (f_1, f_2), parallèlement au plan G de base (f_3, f_4).
Déterminer sans calcul la matrice S^{-1}.

2. Pour tout entier i compris entre 1 et 4, on pose $e'_i = s(e_i)$.
Soit $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$.
Justifier le fait que B' est une base de E.

3. Soient a et b deux réels. On note $u_{a,b}$ l'endomorphisme de E ayant pour matrice dans la base B' :

$$D(a,b) = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-b^2 \end{pmatrix}.$$

a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $u_{a,b}$ soit inversible.
b) Lorsque cette condition est remplie, déterminer la matrice de $[u_{a,b}]^{-1}$ dans la base B'.
(On calculera ses coefficients et on l'exprimera à l'aide de $D(a,-b)$).

4. Soit $M(a,b)$ la matrice de $u_{a,b}$ dans la base B.

Montrer que $M(a,b)=\begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$. (On justifiera et on détaillera les calculs).

On désigne désormais par L l'ensemble des matrices $M(a,b)$ quand (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$.

5. **a)** Calculer $[M(a,b)]^{-1}$ lorsque $M(a,b)$ est inversible et montrer que $[M(a,b)]^{-1}$ appartient à L.

b) Montrer que si (a,b) et (a',b') sont des couples de réels, alors il existe un couple (a'',b'') de réels tel que : $M(a,b)\times M(a',b')=M(a'',b'')$.

6. Les fonctions ch et sh sont les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.
Si t est un réel, on pose $N(t)=M(\mathrm{ch}(t),\mathrm{sh}(t))$ et on note L' l'ensemble des matrices $N(t)$ quand t décrit $\mathbb{R}$.
Montrer que L' est un sous-groupe commutatif de $GL_4(\mathbb{R})$ (groupe des matrices réelles inversibles d'ordre 4) et que l'application N de $\mathbb{R}$ dans L' qui à t associe $N(t)$ est un isomorphisme de groupes.

7. Quelle structure algébrique possède l'ensemble $GL_4(\mathbb{R})\cap L$?

8. Déterminer $O(4)\cap L$ où $O(4)$ est l'ensemble des matrices réelles orthogonales d'ordre 4.
(On rappelle qu'une matrice A est orthogonale si elle vérifie : ${}^tA\times A=I_4$ où ${}^tA$ désigne la matrice transposée de la matrice A, et où I_4 est la matrice unité d'ordre 4 .)

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

PARTIE A

On considère l'équation différentielle : $y'+2xy=1$.

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?

On désigne désormais par f l'une de ses solutions sur $\mathbb{R}$, **que l'on ne cherchera pas à exprimer pour l'instant.**

2. **a)** Prouver que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Quelle est la valeur de $f'(0)$?

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) = -2xf^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$.

4. a) Montrer que f admet en 0 un développement limité à tout ordre p (p entier naturel).
Écrivons un tel développement limité au moyen d'une suite de réels : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p).$$

b) À l'aide du résultat de la question 3, montrer que : $\forall k \in \mathbb{N},\quad a_{2k+1} = \dfrac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}$.

c) Obtenir également l'expression des termes a_{2k} à l'aide de $f(0)$ (k entier naturel).

PARTIE B

On considère la fonction de la variable réelle $D : x \mapsto D(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$.

1. Justifier le fait que D est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et vérifier que D est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

2. Etudier la parité de D.

3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x\, e^{-x^2} \le D(x) \le x$.

4. a) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}dt$.

b) Soit la fonction $h : t \mapsto \dfrac{e^{t^2}}{t^2}$. Montrer que h est croissante sur $[1, +\infty[$. En déduire que :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\quad \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}dt \le h(x)\int_1^x \frac{1}{t^2}dt,$$

et qu'au voisinage de $+\infty$: $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4}dt = o\left(\frac{e^{x^2}}{2x}\right)$.

c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$: $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$.

En déduire enfin un équivalent de $D(x)$ au voisinage de $+\infty$.

5. a) Prouver que D admet un maximum, atteint en un point b de $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Montrer que ce maximum est égal à $\dfrac{1}{2b}$.

c) En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

PARTIE C

1. Déterminer à l'aide de D l'ensemble des fonctions solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$.

2. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.