Épreuve de Mathématiques

Classements SUP (TSI) et SPE (TSI)

Mardi 21 Mai 1996 de 8 h 00 à 12 h 00

Instructions :

Les candidats doivent vérifier que le sujet comprend 4 pages numérotées 1/4, 2/4, 3/4 et 4/4.
Les candidats doivent traiter les problèmes 1 et 2 qui sont indépendants.
Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME 1

$\mathcal{F}$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On définit pour f appartenant à $\mathcal{F}$ l'application T(f) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x\in \mathbb{R},\ [T(f)](x) = 1 - \int_0^x \frac{t\, f(t)}{1+t^2}\,dt$.

On note ϕ l'application définie par : $\forall x\in \mathbb{R},\ \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Partie A

A-1°) Vérifier que ϕ appartient à $\mathcal{F}$. Etudier la fonction ϕ et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

A-2°) Montrer que $T : f \longrightarrow T(f)$ est une application de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. T est-elle linéaire ?

A-3°) Déterminer $T(\phi)$ en fonction de ϕ.

Partie B

On définit la suite $(f_n)_{n\in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ par la donnée d'une fonction f_0 de $\mathcal{F}$ et par :

$$\forall n\in \mathbb{N},\ f_{n+1} = T(f_n).$$

On se propose de montrer que pour toute fonction f_0 de $\mathcal{F}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in \mathbb{N}}$ converge vers le réel $\phi(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

B-1°) On pose $\forall n\in \mathbb{N},\ f_n = \phi + (-1)^n g_n$.

Montrer que : $\forall n\in \mathbb{N},\ \forall x\in \mathbb{R},\ g_{n+1}(x) = \int_0^x h(t)\, g_n(t)\,dt$ où h est la fonction définie par : $\forall t\in \mathbb{R},\ h(t) = \frac{t}{1+t^2}$

B-2°) On se propose d'étudier un cas particulier $(f_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ de suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A cet effet, on définit la fonction g_0^* par $\forall x\in\mathbb{R},\ g_0^*(x) = 1$ et la suite de fonctions $(g_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ g_{n+1}^*(x) = \int_0^x h(t)\, g_n^*(t)\, dt .$$

Les fonctions f_n^* et g_n^* sont donc liées par la relation :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ f_n^* = \phi + (-1)^n g_n^* .$$

a) Déterminer g_1^* et g_2^*.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $g_n^*(x) = a_n\,[\ln(1 + x^2)]^n$ où a_n est un réel que l'on précisera.

c) x étant un réel, en déduire la limite de $g_n^*(x)$ puis de $f_n^*(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

B-3°) On revient au cas général : f_0 est une fonction quelconque de $\mathfrak{F}$. Soit a un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe deux réels m et M tels que :

$$\forall t\in[-a, a],\ m \le g_0(t) \le M .$$

b) En déduire que : $\forall x\in[0, a]$, $m\, g_1^*(x) \le g_1(x) \le M\, g_1^*(x)$.

c) Etablir que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall x\in[0, a]$, $m\, g_n^*(x) \le g_n(x) \le M\, g_n^*(x)$.

d) Etablir un résultat analogue à celui de la question B-3°-c pour x dans [-a, 0].

e) A l'aide des résultats précédents, montrer que :

$$\forall x\in[-a, a],\ m\, g_n^*(x) \le g_n(x) \le M\, g_n^*(x).$$

f) En déduire que, pour tout réel x, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\phi(x)$.

Partie C

C-1°) On se propose à présent de déterminer les fonctions ϕ_λ de $\mathfrak{F}$ non nulles et les réels λ non nuls tels que :

$$T(\phi_\lambda) = \lambda\, \phi_\lambda \qquad (E_\lambda)$$

a) Montrer que si une fonction ϕ_λ satisfait à (E_λ) alors elle satisfait à l'équation différentielle :

$$\lambda\, y' + \frac{x}{1 + x^2}\, y = 0 \qquad (D_\lambda)$$

b) Pour $\lambda \neq 0$, résoudre l'équation différentielle (D_λ) sur $\mathbb{R}$. Montrer que ses solutions sont de la forme $y_{\lambda,k} = k\,\theta_\lambda$ où k est un réel et θ_λ est une fonction que l'on précisera.

c) Déterminer k de manière à ce que $y_{\lambda,k}$ soit solution de (E_λ). En déduire que pour tout réel $\lambda\neq 0$ il existe une unique solution ϕ_λ non nulle de (E_λ) dont on donnera l'expression.

C-2°) Pour $\lambda \neq 0$ on définit la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathfrak{F}$ par la donnée d'une fonction F_0 quelconque de $\mathfrak{F}$ et par la relation : $\forall n\in\mathbb{N},\ F_{n+1} = \frac{1}{\lambda} T(F_n)$.

En reprenant la démarche de la partie B, montrer que, pour tout réel x, la suite numérique $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\phi_\lambda(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

PROBLEME 2

Dans tout le problème on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On désigne par $\mathcal{E}$ la base (e_1, e_2, e_3) telle que $e_1 = (1,0,0)$ $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1&0&0 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ et $O = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$.

On convient que si M est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $M^0 = I$.

Si P désigne le polynôme à coefficients réels $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ et si M désigne une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note P(M) la matrice $P(M) = \sum_{i=0}^{n} a_i M^i = a_0 I + a_1 M + \dots + a_n M^n$.

Partie A

A-1°) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. On fera apparaître sur la copie la méthode utilisée et les calculs intermédiaires.

A-2°) **a)** Calculer A^2 et A^3.

b) Montrer que A, A^2 et A^3 se mettent sous la forme :

$A = \lambda_1 A + \mu_1 I$, $\quad A^2 = \lambda_2 A + \mu_2 I \quad$ et $\quad A^3 = \lambda_3 A + \mu_3 I$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2$ et μ_3 sont des réels que l'on précisera.

A-3°) On donne la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ définie par $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $\forall n \geq 1$, $\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n$.

Montrer, par récurrence sur n que : $\forall n \geq 2$, $A^n = \alpha_n A + 2\alpha_{n-1} I$

A-4°) **a)** Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = \sigma(-1)^n + \tau 2^n$, où σ et τ sont deux réels indépendants de n que l'on déterminera.

b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n pour tout n entier naturel non nul.

Partie B

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est A.

B-1°) **a)** On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f + id)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2id)$. Rappeler pourquoi E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer E_1 et E_2 ainsi que leur nature géométrique. Donner une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 et une base $\mathcal{B}_2$ de E_2.

<u>On choisira des vecteurs dont la première coordonnée est 1 et dont une coordonnée est nulle, lorsque cela est possible</u>.

c) Montrer que si l'on complète la base $\mathcal{B}_1$ par l'élément de la base $\mathcal{B}_2$ on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

d) Montrer que : $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

e) Soit f_1 (respectivement f_2) l'application de E_1 dans E_1 (respectivement de E_2 dans E_2) définie par $\forall x \in E_1, f_1(x) = f(x)$ (respectivement $\forall x \in E_2, f_2(x) = f(x)$). Déterminer la nature géométrique de f_1 et de f_2.

B-2°) a) Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{B}$.

c) Rappeler pourquoi P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

d) Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $A^n = P D^n P^{-1}$.

e) En déduire la valeur de A^n en fonction de n pour tout n entier naturel non nul. Comparer le résultat obtenu avec celui de la question A-4°b.

Partie C

C-1°) a) Calculer le produit : $(A + I)(A - 2I)$. En déduire à nouveau que A est inversible et retrouver la valeur de A^{-1}.

b) Calculer de même $(A + I)^2$, $(A - 2I)^2$ et en déduire une expression simple de $(A + I)^n$ et de $(A - 2I)^n$ pour tout n entier naturel non nul.

C-2°) Soit M(a,b) la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

a) On note $\mathcal{F}$ l'ensemble $\mathcal{F} = \{ M(a,b) \,/\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \}$.
Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $\mathcal{F}$ est de dimension 2.

c) Montrer que $((A + I), (A - 2I))$ est une base de $\mathcal{F}$.

d) Calculer les coordonnées de M(a,b) dans cette base.

C-3°) Calculer $[M(a,b)]^n$ pour tout n entier naturel non nul. Vérifier le résultat obtenu dans le cas particulier de M(0,1).

Partie D

Soit n un entier naturel non nul et soit R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $(X + 1)(X - 2)$.

D-1°) a) Que peut-on dire du degré de R_n ?

b) Calculer $R_n(-1)$ et $R_n(2)$ puis déterminer le polynôme R_n.

c) Montrer que les coefficients du polynôme R_n sont des entiers.

D-2°) Retrouver à nouveau l'expression de A^n.